数学 II

上智大学理工学部物理学科　大槻東巳

2006 年 4 月 12 日

目 次

はじめに

参考書

- 線形代数学　　　(佐武　一郎)　掌華房
- 線形代数入門　　(斉藤　正彦)　東京大学出版会
- 詳解線形代数演習 (鈴木　　他)　共立出版

行列

$$\begin{array}{l} ax+by=x_0 \\ cx+dy=y_0 \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

- 多元一次方程式の解法
- 運動方程式：n 粒子問題も行列の手法で

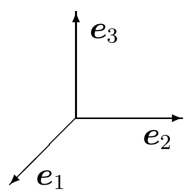
高校まで：
　　$2, 3$ 次元ベクトル
　　2×2 行列
これから：
　　n 次元ベクトル
　　$N \times M$ 行列

1. ベクトルと行列
2. 行列式
3. ベクトル空間の性質
4. 固有値と固有ベクトル

$1, 2, 3, 4$ の後に中間、期末試験

第1章　ベクトルと行列

1.1　ベクトル



$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

→ 一般化して $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ という n 次元ベクトル$\boldsymbol{a}$とかく。

等式：$\boldsymbol{b}= (b_1, b_2, \ldots, b_{n'})$ とすると、$\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{b}$とは

$$\begin{cases} n = n' \\ a_i = b_i \quad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

が成立していること。

加法　　　　　：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
スカラー乗法：$c\boldsymbol{a} = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$

加法の性質：

1. 結合則
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \tag{1.1}$$

2. 変換則
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1.2}$$

3. $\mathbf{0}$が存在し
$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a} \tag{1.3}$$

4. $\boldsymbol{a}$に対して $-\boldsymbol{a}$ が存在し
$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

スカラー乗法：

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \tag{1.5}$$

$$(c+d)\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a} \tag{1.6}$$

$$(cd)\boldsymbol{a} = c(d\boldsymbol{a}) \tag{1.7}$$

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{1.8}$$

例）$c\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ をとく。

$$\begin{aligned}
(c\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \\
= c\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}) & \\
\therefore \quad c\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} \\
\frac{1}{c}(c\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \\
=(\frac{1}{c}c)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \\
\therefore \quad \boldsymbol{x} &= \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

一次結合：

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を使ってできる

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

の形に表せるベクトルを $\boldsymbol{a}_i(i=1\cdots m)$ の線形結合という。

特に $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0), \boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0),\cdots$ とおくと

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

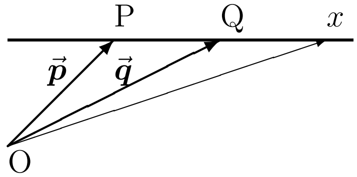
とかける。

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を単位ベクトルという。

n 次元空間の直線

点 P(位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{p}}$) と点 Q(位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{q}}$) を通る直線上の点を位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{x}}$ で表すと

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) \quad t: \text{実数} \tag{1.9}$$



n 次元空間の平面
$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ を点 P, Q, R の位置ベクトルとするとこの三点のつくる平面上の点 x の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) + s(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) \tag{1.10}$$

内積：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta \tag{1.11}$$

外積：
三次元ベクトルで定義される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \boldsymbol{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \tag{1.12}$$

向き：$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$の方向へ右ねじをまわしたときに進む方向
大きさ：$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$
θ：$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角

外積の性質：

1. $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.13}$$

2. $$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{1.14}$$

3. $$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) \tag{1.15}$$

4. $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{1.16}$$

問 1　ベクトル
$(2, 0, 0)$ を $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1), \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1), \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0)$ で表せ。

解.

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} y+x \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ & x = -z \\ & y = -x \\ & y + z = 2z = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ z = 1, x = -1, y = 1$$

よって

$$(2,0,0) = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$

問 2　外積

(1)$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ としたとき、$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$ をもとめよ。

(2)$(1,1,1,) \times (1,-2,1)$ は?

問 3

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

のとき、

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$\sigma_y \sigma_z = \sigma_x, \sigma_z \sigma_x = \sigma_y$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y \qquad \text{etc.}$$

を確かめよ。

1.2　行列

2×2 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の行列式は

$$ad - bc$$

で、逆行列は

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

一般の次元では?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \to \text{行} \qquad (n,m)\,\text{行列}$$

$$\downarrow$$

列

n 行 m 列行列

$$2\,\text{列目} \to \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, 3\,\text{行目} \to \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \end{pmatrix}$$

加法：$A+B$ の (i,j) 成分　　$a_{ij}+b_{ij}$　　(注)B も (n,m) 行列
スカラー乗法：cA の (i,j) 成分　　ca_{ij}
行列単位：

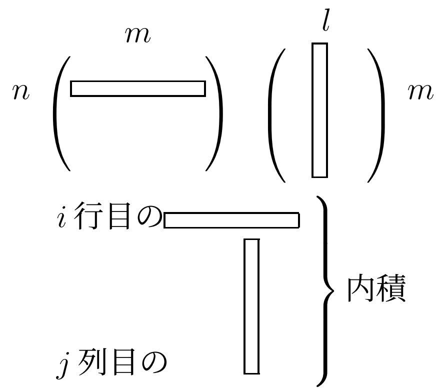
$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = E_{ij} \qquad A = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} a_{ij}E_{ij}$$

重要

行列の乗法：

$$\left.\begin{array}{c} A:(n,m)\,\text{行列} \\ B:(m,l)\,\text{行列} \end{array}\right\}\text{として}\; C = AB\;\text{とは}$$

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{1\le k\le m} a_{ik}b_{kj}$$



(n,m) と (m,l)　　AB は定義できるが $n \neq l$ だと BA は定義できない。

(n,n) と (n,n) は?
A　　B

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$
$$(BA)_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}$$

よって　一般には

$$AB \neq BA$$

例

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

それでは結合則はどうであろう。

Theorem 1.1 行列、A, B, C がそれぞれ $(l,m), (m,n), (n,p)$ 型であるとする。このとき結合則、

$$(AB)C = A(BC) \tag{1.17}$$

が成立する。

証明)A, B, C を $(l,m), (m,n), (n,p)$ 型の行列とする。

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{1 \leq k \leq m} a_{ik} b_{kj} \\ [(AB)C]_{iq} &= \sum_{1 \leq j \leq n} \Big(\sum_{1 \leq k \leq m} a_{ik} b_{kj} \Big) c_{jq} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m} a_{ik} b_{kj} c_{jq} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}(BC)_{kq} &= \sum_{1\leq j\leq n} b_{kj}c_{jq} \\ [A(BC)]_{iq} = \sum_{1\leq k\leq m} a_{ik}(BC)_{kq} &= \sum_{1\leq k\leq m} a_{ik} \sum_{1\leq j\leq n} b_{kj}c_{jq} \\ &= \sum_{1\leq k\leq m, 1\leq j\leq n} a_{ik}b_{kj}c_{jq}\end{aligned}$$

証明終
$(Q.E.D.)$
Quod erat demonstrandum

また分配則も成立。

$$\begin{aligned}A(B+C) &= AB+AC \\ (A+B)C &= AC+BC\end{aligned}$$

証明)Aを(l,m)、B,Cを(m,n)とすると

$$\begin{aligned}(B+C)_{kj} &= (b_{kj}+c_{kj}) \\ [A(B+C)]_{ij} &= \sum_{1\leq k\leq m} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\ &= \sum a_{ik}b_{kj} + \sum a_{ik}c_{kj} \\ &= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} \\ \therefore A(B+C) &= AB+AC\end{aligned}$$

$(A+B)C = AC+BC$も同様

問1
$\mathrm{Tr}A \equiv \sum_i a_{ii}$と定義する。
1)$\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$を示せ。
2)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

としたとき、$\mathrm{Tr}ABC$を計算せよ。

問 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{に対して}$$

1)A^2, A^3 を計算せよ。
2)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を帰納法により証明せよ。

問 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を計算せよ。

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} l_1 & l_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

のとき

$$AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} l_1 & l_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

証明)
(i,k) 成分 $(1 \leq i \leq n_1, 1 \leq k \leq l_1)$

$$\begin{aligned} (AB)_{ik} &= \sum_{j=1}^{m_1+m_2} a_{ij}b_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} a_{ij}b_{jk} \\ &= (A_{11}B_{11})_{ik} + (A_{12}B_{21})_{ik} \end{aligned}$$

同様に $1 \leq i \leq n_1, l_1 + 1 \leq k \leq l_1 + l_2$ 等もできる。
また、これより

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

一般に

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & & m_u \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1u} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & & l_v \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1v} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{u} A_{1j}B_{j1} & \sum_{j=1}^{u} A_{1j}B_{j2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

とかける。

転置行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

一般に

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= a_{ij} \\ (A^t)_{ij} &= a_{ji} \end{aligned}$$

$$(AB)^t_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = B^t_{ik} A^t_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$$

エルミート共役 (随伴行列)

$$A^\dagger = (A^t)^\star \tag{1.18}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 3i & 4 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 2-i & 4 \end{pmatrix}$$

エルミートの性質

$$(A^\dagger)^\dagger = A \tag{1.19}$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \tag{1.20}$$

$$(cA)^\dagger = c^\star A^\dagger \tag{1.21}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{1.22}$$

特に $A = A^\dagger$ のとき、A をエルミート行列とよぶ。

単位行列 I

$I_{ij} = \delta_{ij}$　　クロネッカーのデルタ

Theorem 1.2 *$n \times n$ 行列 (正方行列)A に対して*

1. *$AX = I$ 及び $X'A = I$ をみたす X, X' が存在すれば $X = X'$ でこれを A^{-1} とかく。*
2. *$AX = B$ の解は $X = A^{-1}B$*
   $XA = B$ の解は $X = BA^{-1}$

証明)
$AX_1 = I, X_2A = I$ という解 X_1, X_2 が存在したとする。すると

$$X_1 = IX_1 = (X_2A)X_1 = X_2(AX_1) = X_2I = X_2$$

$\therefore X_1 = X_2$, また $AX_1' = I$ という解があると
$X_1' = X_2 = X_1 \qquad \therefore X_1 = X_1'$ となる。
よって解は一意的に決まる!
こうして $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ が示される。

逆行列が存在する行列：**正則行列**

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$\because$ $(AB)(AB)^{-1} = AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

問１　対角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

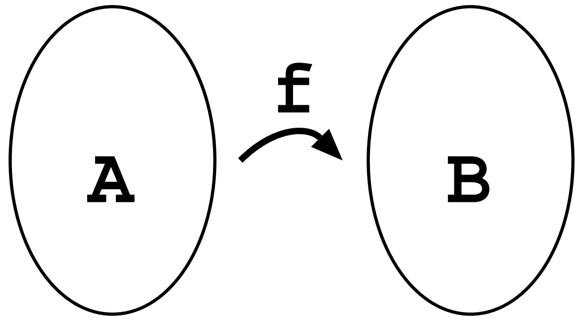
が逆行列をもつ (正則である) 条件を求めよ。またこのとき、逆行列を求めよ。
問２

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & a_1 \\ & 1 & & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 0 & \\ & & 1 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{は?}$$

問３
以下の行列の積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



問 4
エルミート行列 ($A = A^\dagger$をみたすもの) の対角成分はすべて実数であることを示せ。

1.3　写像 (一次変換)

ある集合から別の集合への対応 → 写像
ここで $\underbrace{m\text{ 次元ベクトルの集合}}_{m\text{ 次元ベクトル空間}}$ から n 次元ベクトル空間への写像を f とする。

$\boldsymbol{x} \in m$ 次元ベクトル空間
$\boldsymbol{y} \in n$ 次元ベクトル空間

これを $f : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ とかく。

任意の $\boldsymbol{y}$ に対して

$\boldsymbol{x}$が少なくとも 1 つ存在：上への写像
$\boldsymbol{x}$がちょうど 1 つ存在：一対一写像

線形写像 f とは

1. $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$
2. $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

をみたすもの。この二つの性質から

$$f(\sum_\nu c_\nu \boldsymbol{x}_\nu) = \sum_\nu c_\nu f(\boldsymbol{x}_\nu)$$

が示される。また $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ とおくことで $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が示される。

Theorem 1.3 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ で定義される写像は一次写像。
また任意の一次写像 f は (n, m) 行列 A で表現できる。
証明*)*

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 \\ A(c\boldsymbol{x}) &= cA\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって A をかけるという操作は線形写像。

逆に m 次元ベクトル空間の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$、$n$ 次元ベクトル空間の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ とする。

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}'_i a_{ij}$$

とおくと、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}'_i$$

となり

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= f(\sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} x_j f(\boldsymbol{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}'_i a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}'_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} x_j \end{pmatrix} \\ &= A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって f から A が一意的にきまる。

　$m = n$ の場合を特に 一次変換 とよぶ。
このとき f が n 次元ベクトル空間から自分への上への一対一対応なら、

　　$\rightarrow$ 任意の$\boldsymbol{y}$に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる$\boldsymbol{x}$が存在する。

　　このとき $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ とかく。

f^{-1} も線形写像：

∵

$$\boldsymbol{x}_1 = f^{-1}(\boldsymbol{y}_1), \boldsymbol{x}_2 = f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)$$

とすると

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ &= f^{-1}(\boldsymbol{y}_1) + f^{-1}(\boldsymbol{y}_2) \end{aligned}$$

また

$$\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

として

$$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{y}$$

$$c\boldsymbol{x} = f^{-1}(c\boldsymbol{y}) = cf^{-1}(\boldsymbol{y})$$

f^{-1} に対応する行列を A^{-1} とおくと $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

1.4　内積

　ベクトルの内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_i b_i$$

これを行列の積として考える。

$$(1, n)(n, 1) \rightarrow (1, 1)$$

そこで内積は

$$\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_i a_i b_i$$

とかける。複素数の行列は

$$(\boldsymbol{a}^t)^\star \boldsymbol{b} = (a_1^\star, a_2^\star, \ldots, a_n^\star)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_i a_i^\star b_i$$

$(\boldsymbol{a}^t)^\star = \boldsymbol{a}^\dagger$ なので
内積 $= \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{b} \equiv (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

　ここで $f : \boldsymbol{x} \to y, y = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ とおくと
f は一次写像
∵

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_2) \\ &= f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \end{aligned}$$

$$cf(\boldsymbol{x}) = f(c\boldsymbol{x})$$

$(Q.E.D.)$

内積の性質

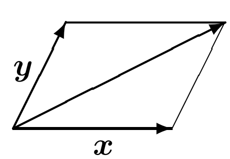
$$\text{共役線形性}\begin{cases} (1) & (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ (2) & (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c^\star(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ (3) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^\star = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{cases}$$

正値性　(4)　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ で $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ なら $\boldsymbol{x} = 0$

$\|\boldsymbol{x}\|$：ノルム (長さ)

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

ノルムの性質



1. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$　　三角不等式

2. $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$　　Schwarz の不等式

証明)
2. を先に示す。
$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{0}$ で成立。
$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、任意の複素数 a, b に対して

$$\|a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}\|^2 \geq \boldsymbol{0}$$

$$\begin{aligned}
\|a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}\|^2 &= (a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) \\
&= |a|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + b^\star a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + a^\star b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + |b|^2\|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}$$

ここで $a=\|\boldsymbol{y}\|^2, b^\star = -(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,(b=-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^2\left\{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2\right\} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \geq |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$$

$(Q.E.D.)$

1. の証明

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \\
&= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ 行一列ベクトル} \boldsymbol{x} \\ m \text{ 行一列ベクトル} \boldsymbol{y} \\ (n,m) \text{ 行列 } A \end{array}\right\}\text{を考える。}$$

$$A\boldsymbol{y} \rightarrow n \text{ 行一列ベクトル}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{x}^\dagger A\boldsymbol{y} \\
&= (A^\dagger\boldsymbol{x})^\dagger\boldsymbol{y} \\
&= (A^\dagger\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

また任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y})$ なら $A = B^\dagger$
$\because$

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^\dagger\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y})$$
$$\therefore \left(\boldsymbol{x}, \left(A^\dagger - B\right)\boldsymbol{y}\right) = 0$$

これが任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して成立するためには $B = A^\dagger$

ユニタリ行列：$AA^\dagger = I$ となるもの
性質)

1. $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$　　$\because$ $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^\dagger A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$
2. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
3. A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とかくと

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^\dagger \\ \boldsymbol{a}_2^\dagger \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^\dagger\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^\dagger\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1^\dagger\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^\star\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^\star\boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n^\star\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &= ((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)) \end{aligned}$$

よって $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

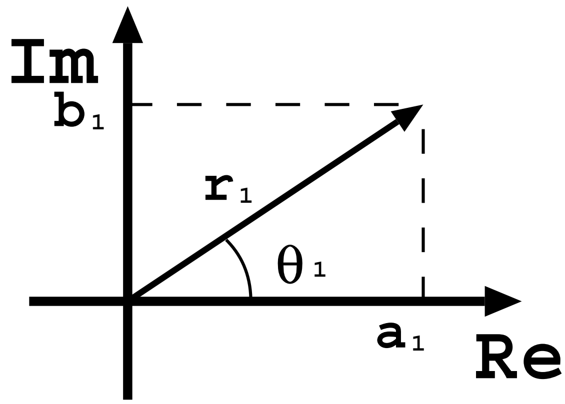
問 1

1. $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が unitary 行列であることを示せ。
2. $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$ は?

問 2
U が unitary のとき、

1. $U^\dagger$ は unitary か?
2. $U^\star$ は unitary か?
3. $(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を示せ。

1.5 複素数と複素平面



$$c_1 = a_1 + ib_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$c_2 = a_2 + ib_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\begin{aligned} c_1c_2 &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned} \tag{1.23}$$

よって
複素数の積：長さ r_1, r_2 をかけ、角度 θ_1, θ_2 を加える。
(注)

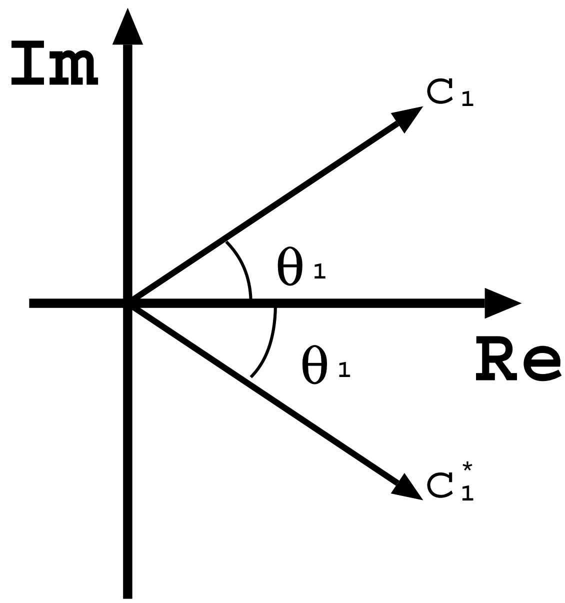
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ \mathrm{e}^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots \\ &= (1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned} \tag{1.24}$$

(オイラーの公式)

$$\therefore r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}$$
$$c_1c_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.25}$$

複素共役：

$$
\begin{aligned}
c_1^\star &= (a_1 + ib_1)^\star \\
&= r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) \\
&= r_1 \mathrm{e}^{-i\theta_1}
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$



こうしておくと割算

$$
\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}
$$

とすぐに計算できる。

1.6　交換子と行列の関数

交換子：

$$
[A,B] \stackrel{\mathrm{def}}{=} AB - BA \tag{1.27}
$$

性質

$$
\begin{aligned}
[cA,B] &= c\,[A,B] && (1.28) \\
[A,B] &= -\,[B,A] && (1.29) \\
[A+B,C] &= [A,C] + [B,C] && (1.30) \\
[AB,C] &= A\,[B,C] + [A,C]\,B && (1.31)
\end{aligned}
$$

$$
[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0 \tag{1.32}
$$

(Jacobi の恒等式)

また $[A, B] = 0$ のとき A と B は可逆であるという。

行列の関数：関数 $f(x)$ が級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定義されている場合

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \qquad (A \text{ は正方行列})$$

を定義する。
例：

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \\ \sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!} \\ \log(1+A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} A^n}{n} \end{aligned}$$

簡単な例

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

のとき

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \\ e^A &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \\ \sin A &= \begin{pmatrix} \sin a & 0 \\ 0 & \sin b \end{pmatrix} \\ \cos A &= \begin{pmatrix} \cos a & 0 \\ 0 & \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般に対角行列

$$A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

に対しては、

$$f(A_{\mathrm{diag}}) = \begin{pmatrix} f(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(a_n) \end{pmatrix}$$

$[A,B] \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B &\neq \mathrm{e}^{A+B} \\ &\neq \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A \end{aligned}$$

なので要注意。
例.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix} \\ \mathrm{e}^B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix}$$

一方

$$\mathrm{e}^{A+B} = 1 + A + B + \frac{(A+B)^2}{2} + \ldots$$

$$\mathrm{e}^B \mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \mathrm{e}^b \\ 0 & \mathrm{e}^b \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{A+B} \qquad if \qquad [A,B] = 0$

第2章　行列式

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式：$ad - bc := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$

$n \times n$ 行列式は?

2.1　置換

$1, 2, 3, \ldots, n$ を並べかえる操作 $\rightarrow$ 置換 (permutation)

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots\ , & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \\ i_1 & i_2 & i_3 & & i_n \end{array}$$

これを置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ と呼ぶ。置換は i 番目の場所にあるものを $\sigma(i)$ 番目におくと考えるとよい。

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1_2$　恒等置換　一般に 1_n とかく。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ならば

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

積：二つつづけて置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho) \\ 1_n \cdot \sigma = \sigma \cdot 1_n = \sigma \\ \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_n \end{cases}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{乗法 (演算) が定義、結合則が成立} \\ \text{単位元 } 1_n \text{が存在} \\ \text{任意の元}\sigma\text{に対して}\sigma^{-1}\text{が存在} \\ \text{演算がとじている}\end{array}\right.$

n 文字の置換全体 S_n($n!$個) は群をなす。

置換 σ の性質

1. σ が S_n 全体をくまなく動く $\rightarrow$ σ^{-1} も S_n 上をくまなく動く。

2. σ が S_n 全体をくまなく動く $\rightarrow$ $\sigma\tau$ も S_n 上をくまなく動く。

証明)
$\sigma \neq \sigma'$ なら $\sigma^{-1} \neq \sigma'^{-1}$　$\therefore \sigma^{-1}$ は重複しない
$n!$個σ がうごくと σ^{-1} もちょうど $n!$ 個の値をとる
同様に $\sigma \neq \sigma'$ なら $\sigma\tau \neq \sigma'\tau$、よって $\sigma\tau$ は重複しないので $n!$ 個の値をとる $\rightarrow$ S_n を動く

互換：2 つだけ置換したもの

Theorem 2.1 任意の置換は互換の積で表せる。
互換の数の偶奇は互換のし方によらない。

証明)
n 変数関数

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \ldots, x_n) = \ & (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \ldots (x_n - x_1) \\ & \times(x_{n-1} - x_{n-2}) \ldots (x_{n-1} - x_1) \\ & \vdots \\ & \times(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

を考えよう。

$$\begin{aligned} \Delta^\sigma(x_1, \ldots, x_n) & \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \\ & = \pm\Delta(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

σ が互換なら

$$\Delta^\sigma = -\Delta$$

もし $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k = \rho_1 \dots \rho_l$ として表されていると

$$\Delta^\sigma = (-1)^k \Delta(x_1, \dots, x_n) = (-1)^l \Delta(x_1, \dots, x_n)$$

$\therefore k$ と l の偶奇は一致

こうして $\mathrm{sgn}\sigma := \begin{cases} 1 & \text{互換数} & \text{偶} \\ -1 & \text{〃} & \text{奇} \end{cases}$ が一意的に決まる。

$$\left(\mathrm{sgn}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots \end{pmatrix} \text{とかく。} \right)$$

任意の置換が互換の積となるのは数学的帰納法

$n = 1$ のとき OK

$n-1$ の σ が互換の積 $\to i_n \neq n$ とする。$\sigma = \begin{pmatrix} i_n & n \\ n & i_n \end{pmatrix} \sigma_1$ とすると

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i_n & n \\ n & i_n \end{pmatrix} \sigma \quad \sigma_1(n) = n$ より σ_1 は互換で表せる。

$QED.$

問

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \dots & & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$ の符合は?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(1\ n)(2\ n-1)\dots}_{\substack{\frac{n}{2} \quad (n:\text{偶}) \\ \frac{n-1}{2} \quad (n:\text{奇})}}$$

$$\therefore (-1)^{\frac{n}{2}}, (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

これをまとめると

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \dots & & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{で} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 2 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n-1 & 1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix} \text{で} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 2 & \dots & 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n-2 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix} \text{で} \dots$$

結局 $n-1$ 回互換する。

$$(-1)^{n-1}$$

2.2　行列式

(n,n) 型行列 $A((i,j)$ 成分 $a_{ij})$ の行列式

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{def}}{=} \sum \varepsilon(p_1, p_2, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\sum$ はすべての置換 ($n!$ 個) についてとる。$\varepsilon(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は $\left\{ \begin{array}{ll} \text{偶置換} & +1 \\ \text{奇置換} & -1 \end{array} \right.$

$\downarrow$

(互換の数)

$(2,2)$ 型

$$|A| = \sum \varepsilon(p_1, p_2) a_{1p_1} a_{2p_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2}$$

$(3,3)$ 型

$$|A| = \sum \varepsilon(p_1, p_2, p_3) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad : \quad +a_{11}a_{22}a_{33}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad +a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad +a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad -a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad -a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad : \quad -a_{12}a_{21}a_{33}$$

問 1

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -47$$

問 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

問 3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} &= \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} a_{1n}a_{2\ n-1}\dots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\ n-1}\dots a_{n1} \end{aligned}$$

問 4

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

のとき

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) f_{1p_1} \dots f_{np_n})' \\ &= \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) f'_{1p_1} f_{2p_2} \dots f_{np_n} \\ &+ \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) f_{1p_1} f'_{2p_2} \dots f_{np_n} \\ &+ \dots \\ &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2.3　行列式の性質

i) 行と列を入れ換えても同じ。即ち $|A| = |A^t|$

$$\begin{aligned} \because \quad |A| &= \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1p_1} \dots a_{np_n} \\ |A^t| &= \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{p_1 1} \dots a_{p_n n} \end{aligned}$$

今、$p_j = k$ となる j を i_k とかくと

$$a_{p_j j} = a_{k i_k}$$

これより

$$a_{p_1 1} \dots a_{p_n 1} = a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

$$\therefore |A^t| = \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$$

一方 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ の互換の数を l とすると、$\begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ から l 回の互換で

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_{i_1} & p_{i_2} & \dots & p_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

は l 回の互換。この逆は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ なのでこれも l 回の互換。

$$\therefore \varepsilon(p_1 \dots p_n) = \varepsilon(i_1 \dots i_n)$$

$(Q.E.D.)$

ii)2 つの行を入れかえると−がつく
A の r 行と s 行を入れかえたものを B とすると

$$\begin{aligned} |B| &= \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_r \ldots p_s \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots a_{rp_s} \ldots a_{sp_r} \ldots a_{np_n} && (2.4) \\ &= -\sum \varepsilon(p_1 \ldots p_s \ldots p_r \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots a_{rp_s} \ldots a_{sp_r} \ldots a_{np_n} && (2.5) \\ &= -|A| && (2.6) \end{aligned}$$

ii)$'$ 列を入れかえても−がつく
ii)$''$ 行または列を l 回入れかえると $(-1)^l$ がつく

iii) 二つの行が等しければ $|A| = 0$

$$\because \quad \begin{aligned} |A| &= -|A| \\ |A| &= 0 \end{aligned}$$

iv) 一つの行を c 倍すると行列式も c 倍
$\because i$ 行目を c 倍したものを A' とすると

$$\begin{aligned} |A'| &= \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots (ca_{ip_i}) \ldots a_{np_n} \\ &= c|A| \end{aligned}$$

iv)$'|cA| = c^n|A|$
v) 一つの行 (列) が二つの数の和なら、即ち

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

なら

$$|A| = |A_1| + |A_2|$$

A_1 は i 行目が b_{ij}, A_2 は i 行目が c_{ij}

$$\because \quad \begin{aligned} |A| &= \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots a_{ip_i} \ldots a_{np_n} \\ &= \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots (b_{ip_i} + c_{ip_i}) \ldots a_{np_n} \\ &= \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots b_{ip_i} \ldots a_{np_n} \\ &+ \sum \varepsilon(p_1 \ldots p_n) a_{1p_1} \ldots c_{ip_i} \ldots a_{np_n} \\ &= |A_1| + |A_2| \end{aligned}$$

vi) 一つの行を c 倍して別の行に加えても行列式はかわらない
$\because$ i 行目に j 行目の c 倍を加える

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \because \quad \text{左辺} &= \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1p_1} \dots a_{np_n} \\ &= \sum \varepsilon(1p_2 \dots p_n) a_{11} a_{2p_2} \dots a_{np_n} \\ &= a_{11} \sum \varepsilon(p_2 \dots p_n) a_{2p_2} \dots a_{np_n} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

問 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

問 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 15 \\ 0 & -1 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} = 1$$

問 3

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2) \\
&= (b-a)[(c-a)(c+a)-(c-a)(b+a)] \\
&= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

問 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ -1 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 295$$

問 5

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & -x_4 \\ 0 & x_2 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & -x_4 \\ 0 & x_2 & 0 & -x_4 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & (1+x_4)+\frac{x_4}{x_1}+\frac{x_4}{x_2}+\frac{x_4}{x_3} \end{vmatrix} \\
&= x_1x_2x_3x_4(1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4})
\end{aligned}$$

問 6

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & y & b & b \\ c & c & z & c \\ d & d & d & u \end{vmatrix} &= abcd \begin{vmatrix} \frac{x}{a} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{y}{b} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{z}{c} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{u}{d} \end{vmatrix} \\
&= abcd \begin{vmatrix} \frac{x}{a}-1+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{y}{b}-1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{z}{c}-1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{u}{d}-1+1 \end{vmatrix} \\
&= abcd(\frac{x}{a}-1)(\frac{y}{b}-1)(\frac{z}{c}-1)(\frac{u}{d}-1) \\
&\times (1+\frac{a}{x-a}+\frac{b}{y-b}+\frac{c}{z-c}+\frac{d}{u-d}) \\
&= (x-a)(y-b)(z-c)(u-d)(1+\frac{a}{x-a}+\frac{b}{y-b}+\frac{c}{z-c}+\frac{d}{u-d})
\end{aligned}$$

問 7

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

問 8

$|\boldsymbol{l}_i| = 1 (i = 1 \dots n), \boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_j = 0 (i \neq j)$ として
$(\boldsymbol{l}_1 \dots \boldsymbol{l}_n)$ を考えると

$$|\boldsymbol{l}_1 \dots \boldsymbol{l}_n| = \pm 1$$

問 9
H　Hermite　$\det H$　real
U　Unitary　$|\det U|$　?

2.4　行列式の積

i)

$$|AB| = |A| \cdot |B| \tag{2.7}$$

$$\because \quad |AB| = \sum_{\substack{1 \le i_1 \le n \\ 1 \le i_2 \le n \\ \vdots}} \begin{vmatrix} a_{1i_1}b_{i_1 1} & a_{1i_2}b_{i_2 2} & \dots \\ a_{2i_1}b_{i_1 1} & a_{2i_2}b_{i_2 2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ni_1}b_{i_1 1} & a_{ni_2}b_{i_2 2} & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \sum b_{i_1 1} b_{i_2 2} \dots b_{i_n n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ni_1} & \dots & a_{ni_n} \end{vmatrix}$$

$i_1 = i_2$とかになるとこれは 0 なので

$\sum$ は $n!$についてとる

$$= \sum b_{i_1 1} b_{i_2 2} \dots b_{i_n n} \varepsilon(i_1 i_2 \dots i_n)|A|$$
$$= |A||B|$$

ii)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} \end{array} = |A||B| \tag{2.8}$$

$\because$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1p_1} \dots a_{np_n}$$

$i \ge r+1, j \le r$ のとき $a_{ij} = 0$。$p_1 \dots p_r$ のうち r より大きい数があると $p_{r+1} \dots p_n$ のうちに $r+1$ 以下の数がある。よってこのとき $a_{1p_1} \dots a_{np_n}$ の中で $a_{ij} (i \le r, r+1 \le j)$ があると、つまり C の元があるとこの項は 0。よって $C = 0$ とおく。すると

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1p_1} \dots a_{np_n} &= \sum \varepsilon(p_1 \dots p_r) a_{1p_1} \dots a_{rp_r} \\ &\times \sum \varepsilon(p_{r+1} \dots p_n) a_{r+1 p_{r+1}} \dots a_{np_n} \end{aligned}$$

$(Q.E.D)$

ii) を使って i) も出せる。

$$\begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$n+m$ 列に b_{mk} をかけて k 列に加えると

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ AB & A \end{pmatrix}$$

$$\therefore |A||B| = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ AB & A \end{pmatrix} = (-1)^{2n} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} = |AB|$$

問 1

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

$\because k$ 列から $n+k$ 列をひくと $(1 \leq k \leq n)$

$$= \begin{vmatrix} A-B & B \\ B-A & A \end{vmatrix}$$

$n+l$ 列に l 列を加えると

$$= \begin{vmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

問 2

$\mathrm{det} A^{\dagger} A \geq 0$ を示せ。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} && A^{-1}\text{存在と仮定} \\ &= \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix} && D^{-1}\text{存在と仮定} \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= |A||D-CA^{-1}B| \\ &= |D||A-BD^{-1}C| \end{aligned}$$

2.4.1　行列式の抽象的な定義

行列式は

1. 交代性 $\phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = -\phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
2. 多重線形性 $\phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + \phi(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
3. 単位性 $\phi(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$

を満たす。また上を満たすものは行列式に限られる。

2.5　余因子・小行列式

$$D = \sum \varepsilon(p_1 \dots p_n) a_{1p_1} \dots a_{np_n}$$

を考える。i 行目の要素 a_{ij} は各項に一回ずつ現われ

$$D = a_{i1}\bar{A}_{i1} + a_{i2}\bar{A}_{i2} + \dots$$

となる。
A_{11} はどのようなものか?

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= u_{11}A_{11} + \begin{vmatrix} \\ \text{(残り)} \\ \\ \end{vmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

行列 A の i 行目と j 行目をのぞいたものを $(n-1)$ 次小行列式 (minor) とよぶ。これを Δ_{ij} とかく。

また、$D = a_{i1}\bar{A}_{i1} + \dots$ としたときの $\bar{A}_{ij}$ を余因子と呼ぶ。

Theorem 2.2

$$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \tag{2.9}$$

証明)
A の i 行目 $\to$ 1 行目　j 列目 $\to$ 1 列目
1 行目 $\to$ 2 行目　1 列目 $\to$ 2 列目
$\vdots$　$\vdots$
としたものを A' とおくと

$$|A'| = (-1)^{i+j}|A|$$

一方

$$|A'| = a_{ij}\Delta_{ij} + \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{a_{ij}\text{はもうない}}$$

$$\begin{array}{rcl} \therefore \quad |A| &=& (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} + \ldots \\ \therefore \quad \bar{A}_{ij} &=& (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \end{array}$$

また、i 行目の要素 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ のかわりに $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ をおくと二つの行 (i 行と j 行) が一致するので $|A| = 0$

$$\therefore \quad a_{i1}\bar{A}_{j1} + a_{i2}\bar{A}_{j2} + \ldots + a_{in}\bar{A}_{jn} = \delta_{ij}|A|$$

列の場合も同様で

$$a_{1i}\bar{A}_{1j} + a_{2i}\bar{A}_{2j} + \ldots + a_{ni}\bar{A}_{nj} = \delta_{ij}|A|$$

2.6　Cramer の公式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

のとき

$$(A')_{ij} = \bar{A}_{ji}$$

とすると

$$[(A')A]_{ij} = \sum_k (A')_{ik} a_{kj} = \sum_k a_{kj}\bar{A}_{ki} = |A|\delta_{ij}$$

$$\begin{array}{rcl} \therefore \quad |A|\boldsymbol{x} &=& A'\boldsymbol{b} \\ &=& \begin{pmatrix} \sum_k b_k A'_{1k} \\ \sum_k b_k A'_{2k} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} \sum_k b_k \bar{A}_{k1} \\ \sum_k b_k \bar{A}_{k2} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} |A|x_i &= \sum_k b_k \bar{A}_{ki} \\ &= \sum_k (-1)^{k+i} b_k \Delta_{ki} \\ &= \begin{array}{ccccc} & & i\,\text{行} & & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & i\,\text{行} & & \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A| \neq 0$ のときこの連立方程式の解は

$$\begin{array}{ccccc} & & i\,\text{行} & & \end{array}$$

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で与えられる。

問 1

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -784$$

展開式の別の証明

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\bar{A}_{11} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\bar{A}_{11} + (-1)a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\bar{A}_{11} + a_{21}\bar{A}_{21} + a_{31}\bar{A}_{31} + \dots + (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & \boxed{} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ a_{n1} & \dots\dots \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\bar{A}_{i1}
\end{aligned}
$$

問 2

$|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-1}$ を示せ

2.7　逆行列

余因子行列 (adjugate matrix)

$$(\mathrm{adj}A)_{ij} = \bar{A}_{ji} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji} \tag{2.10}$$

これを用いると

$$
\begin{aligned}
a_{i1}\bar{A}_{j1} + a_{i2}\bar{A}_{j2} + \dots + a_{in}\bar{A}_{jn} &= \delta_{ij}|A| \\
a_{1i}\bar{A}_{1j} + a_{2i}\bar{A}_{2j} + \dots + a_{ni}\bar{A}_{nj} &= \delta_{ij}|A|
\end{aligned}
$$

は

$$\sum_k a_{ik}(\mathrm{adj}A)_{kj} = |A|\delta_{ij} \quad \leftrightarrow \quad A\ \mathrm{adj}A = |A|I$$
$$\sum_k (\mathrm{adjA})_{jk} a_{ki} = |A|\delta_{ij} \quad \leftrightarrow \quad (\mathrm{adj}A)A = |A|I$$

よって $|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A \tag{2.11}$$

しかも右逆行列と左逆行列は等しい。また右が存在すれば必ず左逆行列も存在。

分割法

$$A = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \qquad (K, L, M, N \text{ は正方行列})$$

のとき

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} + XZ^{-1}Y & -XZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{pmatrix}$$

ここで $X = K^{-1}L, Y = MK^{-1}, Z = N - MK^{-1}L$

$$\begin{aligned} \because \quad & \begin{pmatrix} K^{-1} + XZ^{-1}Y & -XZ^{-1} \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} I + XZ^{-1}M - XZ^{-1}M & K^{-1}L + XZ^{-1}YL - XZ^{-1}N \\ -Z^{-1}M + Z^{-1}M & -Z^{-1}YL + Z^{-1}N \end{pmatrix} \\ = \quad & I \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} K^{-1}L + XZ^{-1}YL - XZ^{-1}N = X + XZ^{-1}(YL - N) = X - X = 0 \\ -Z^{-1}YL + Z^{-1}N = Z^{-1}(N - YL) = Z^{-1}Z = I \end{pmatrix}$$

問 1

1. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4. $\mathrm{adj}A^{-1} = |A|^{-1}A$

問 2
上三角行列 A の逆行列 (A^{-1}) は上三角

問 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= A^{-1}(I+BA^{-1})^{-1} \\ A(A+B)^{-1} &= (I+BA^{-1})^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial a_{ki}}(\det A) &= (A^{-1})_{ik} \end{aligned}$$

問 4
$AB - BA = 0$ のとき A^{-1} と B は交換するか?するときは証明を、しないときは例を上げよ。

逆行列の求め方

行列の基本変形

i)

$$P_n(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

をかける

→ i 行と j 行を交換する

ii)i 行目を c 倍する $(c \neq 0)$

$$Q_n(i;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

iii)j 行目を c 倍して i 行目に加える

$$R_n(i,j;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
P_n(i,j)^{-1} &= P_n(i,j) \\
Q_n(i;c)^{-1} &= \begin{array}{c} \\ i \end{array}\!\!\begin{array}{c} \qquad\qquad\quad i \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\
R_n(i,j;c)^{-1} &= R_n(i,j;-c)
\end{aligned}
$$

これらを左から行列をかけるので左基本変形とよぶ。

この左基本変形から逆行列を求める。

$$
\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}
$$

A に $P(i,j), Q(i;c), R(i,j;c)$ を何度もほどこす

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = P, Q, R \text{ の積} \times I_n
$$

これより P, Q, R の積 $\times I_n =$ 逆行列

例

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

とするには

3 行目から 1 行目をひく

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

3 行目に 2 行目を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目から $\frac{1}{2} \times 3$ 行目をひく

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行目を 1 行目からひく

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 行目を $\frac{1}{2}$ 倍する

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このようにまず上三角行列をつくるとうまくいく。

n 次行列 A と $\mathrm{adj}A$ の $1, \ldots, r$ 行、$1, \ldots, r$ 列からなる r 次小行列式を

$$A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix}, \mathrm{adj}A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\mathrm{adj}A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix} = |A|^{r-1} A \begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

$$
\because \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{r1} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ A_{1r} & \ldots & A_{rr} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ A_{1n} & \ldots & A_{rn} & 0 & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} |A| & & 0 & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & |A| & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nr+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore |A| = \frac{|A|^r A \begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix}}{\mathrm{adj} A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix}}
$$

ただし $i_1 \ldots i_r$ 等は偶順列
一般に

$$
\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ j_1 & \ldots & j_r \end{pmatrix} &= |A|^{r-1} O \begin{pmatrix} i_{r+1} & \ldots & i_n \\ j_{r+1} & \ldots & j_n \end{pmatrix} \\
\therefore \quad \mathrm{adj} A \begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix} &= |A|^{r-1} A \begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix} \\
\mathrm{adj} A \begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix} &= |A|^{n-r-1} A \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r \\ 1 & \ldots & r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(Jacobi の定理)

特に $r = 2$ として

$$
\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A| A \begin{pmatrix} 3 & \ldots & n \\ 3 & \ldots & n \end{pmatrix}
$$

もっと一般的には

$$
\begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = |A| A_{ik} \quad (A_{ik} : i \text{ 行 } k \text{ 行と } i \text{ 列 } k \text{ 列をのぞいたもの})
$$

A の中で始めの $r \times r$ を A_r とかくと

$$B_{ij} = \begin{vmatrix} & & & a_{1j} \\ & A_r & & \vdots \\ & & & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} B_{r+1r+1} & \ldots & B_{r+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{nr+1} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

として

$$\Delta = |A_r|^{n-r-1}|A| \qquad \text{(Sylvester の定理)}$$

$\because A_{ij}$ を余因子とすると

$$C = \begin{pmatrix} A_{r+1r+1} & \ldots & A_{r+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nr+1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

の i 行 j 列をとった行列の行列式は、上の定理から

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j}\mathrm{adj}A\begin{pmatrix} r+1 & \ldots & n \\ r+1 & \ldots & n \end{pmatrix} &= |A|^{n-1-r-1}A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & i \\ 1 & \ldots & r & j \end{pmatrix}(-1)^{i+j} \\ &= (-1)^{i+j}B_{ij}|A|^{n-r-2} \\ \therefore \quad (\mathrm{adj}C)_{ji} &= B_{ij}|A|^{n-r-2} \\ |\mathrm{adj}C| &= |A|^{(n-r-2)(n-r)}\Delta \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} |\mathrm{adj}C| &= |C|^{n-r-1} \\ |C| &= |A_r||A|^{n-r-1} \end{aligned}$$

より

$$|A|^{(n-r)(n-r-2)}\Delta = |A_r|^{n-r-1}|A|^{(n-r-1)(n-r-1)}$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta &= |A_r|^{n-r-1}|A|^{\underbrace{(X-1)^2-(X-2)X}_{X^2+1-2X-X^2+2X=1}} \\ &= |A||A_r|^{n-r-1} \end{aligned}$$

$(Q.E.D.)$

第3章　ベクトル空間の性質

3.1　Binet-Cauchyの定理

前期の復習をかねて、まず、Binet-Cauchy の定理と呼ばれる行列式の定理を証明しておく。これは次のように表される。

Theorem 3.1 (Binet-Cauchyの定理) 行列 A, B をそれぞれ $(m, n), (n, m)$ 型とする。$C = AB$ は (m, m) 型である。このとき、

1. $m = n$ なら $|C| = |A||B|$
2. $m < n$ なら

$$|C| = \sum_{1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m \le n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_m} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{2\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \cdots & b_{\alpha_1 m} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \cdots & b_{\alpha_2 m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{\alpha_m 1} & b_{\alpha_m 2} & \cdots & b_{\alpha_m m} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

3. $m > n$ なら $|C| = 0$

証明)

$$|C| = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jm} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{jm} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jm} \end{vmatrix}$$

は、行列の積と行列式の性質 v) より、

$$|C| = \sum_{k_1, k_2, \cdots, k_m = 1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{mk_m} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{mk_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mk_1} & a_{mk_2} & \cdots & a_{mk_m} \end{vmatrix} \times b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_m m}$$

となる。これより $m > n$ だと、少なくとも 2 列は同じ列が現れる。よって $m > n$ のとき、$|C| = 0$。

$m \leq n$ のとき、$k_1, k_2, \cdots, k_m$ のうち、並び替えて $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ になるものの和を行うと

$$\begin{aligned}|C| &= \sum_{1\leq\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m\leq n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m\alpha_1} & a_{m\alpha_2} & \cdots & a_{m\alpha_m} \end{vmatrix} \\ &\quad \times \sum_{\text{permulation}} \epsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_m m}\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{\text{permulation}} \epsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_m m} = \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \cdots & b_{\alpha_1 m} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \cdots & b_{\alpha_2 m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{\alpha_m 1} & b_{\alpha_m 2} & \cdots & b_{\alpha_m m} \end{vmatrix}$$

なので、$m \leq n$ のときも確かに成立している。 ∎

3.2　ベクトルの一次独立性

(1,0) と (0,1) を $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ とおくと、$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = (x, y)$ は平面上のすべての点をあらわす。

一方、(1,0) と (1,1) も $c_1(1,0) + c_2(1,1)$ という線形結合を考えると、平面上のすべての点を表すことができる。

しかし、(2,1) と (4,2) をどう足しあわせても、$c_1(2,1) + c_2(4,2) = (c_1 + 2c_2)(2,1)$ となり、直線 $y = \frac{x}{2}$ 上の点しか得られない。

本章ではこれを一般化した議論を行う。

まず、線形結合

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots c_n\boldsymbol{a}_n$$

を考える。この線形結合が $\boldsymbol{0}$ になるとき、すなわち

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{3.2}$$

となるのは、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ という自明な解以外にない場合、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は**一次独立** (**線形独立**) と呼ぶ。もし、自明な解以外を持っている場合は、**一次従属** (**線形従属**) と呼ぶ。

一次独立でない場合、つまり一次従属の場合、$c_1, c_2, \overbrace{\cdots}^{(m)}, c_n$ のうち、どれかは 0 でないという解が存在する。その 0 でないものを c_m とおくと、

$$\boldsymbol{a}_m = -\frac{c_1}{c_m}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c_m}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_m}\boldsymbol{a}_n \tag{3.3}$$

となる。ここで右辺では m 番目の項を除いてある。こうして一次従属でない場合、あるベクトル $\boldsymbol{a}_m$ が他のベクトルの線形結合で書き表せることがわかる。

問　$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}\ (1 \geq i, j \geq n)$ を満たすベクトルを正規直交系という。正規直交系は一次独立であることを示せ。

Theorem 3.2 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}$ が一次従属なら、$\boldsymbol{a}_{n+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で表せる。

証明)

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n + c_{n+1}\boldsymbol{a}_{n+1} = \boldsymbol{0}$ の解は、自明でないものを含む。その非自明解は $c_{n+1} \neq 0$ である（なぜならもしこれが 0 なら $\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_n$ の一次独立性により自明解になってしまうから)。これより、

$$\boldsymbol{a}_{n+1} = -\frac{c_1}{c_{n+1}}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c_{n+1}}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_{n+1}}\boldsymbol{a}_n$$

この表し方は一意的である。というのはもし $\boldsymbol{a}_{n+1} = \sum_i^n c_i'\boldsymbol{a}_i = \sum_i^n c_i''\boldsymbol{a}_i$ というように二通りに表せていたら、$\sum_i^n (c_i' - c_i")\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ となり、一次独立性より $c_i' = c_i"$ となるので。 ∎

この対偶命題は

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立で、$\boldsymbol{a}_{n+1}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で書くことができなければ、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n+1}$ は一次独立である

ということである。

こうして $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が与えられたとき、一次独立のベクトルを選ぶには

1. $\boldsymbol{a}_1$ から順番に調べていき、$\boldsymbol{0}$ でないものをみつける

2. それを $\boldsymbol{a}_{i_1}$ とおき、$\boldsymbol{a}_{i_1}$ の定数倍でないものを $\boldsymbol{a}_{i_1+1}, \boldsymbol{a}_{i_1+2} \cdots$ から選び、これを $\boldsymbol{a}_{i_2}$ とおく。

3. 次に $\boldsymbol{a}_{i_1}$, $\boldsymbol{a}_{i_2}$ の線形結合で表せないものを $\boldsymbol{a}_{i_3}$ とおく。

4. これを繰り返す

とすればよい。こうしてできたベクトルの集合を**極大集合**、もしくは**極大線形独立系**と呼ぶ。

Theorem 3.3 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n'}$ はそれぞれ一次独立で、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n'}$ の線形結合で表せ、逆に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n'}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で表せるとき、

$$n = n'$$

である。

証明）
題意より

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} \boldsymbol{a}_i$$

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n'} d_{ij} \boldsymbol{b}_j$$

なので、

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n'} c_{ji} d_{ij'} \boldsymbol{b}_{j'}$$

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{n'} \sum_{i'=1}^{n} d_{ij} c_{ji'} \boldsymbol{a}_{i'}$$

となる。ここで c_{ij} は (n', n) 型、d_{ij} は (n, n') 型である。$\boldsymbol{b}$ の一次独立性から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= \sum_{i}^{n} \sum_{j'}^{n'} c_{ji} d_{ij'} \boldsymbol{b}_{j'} - \boldsymbol{b}_j \\
&= \sum_{i}^{n} \sum_{j'}^{n'} c_{ji} d_{ij'} \boldsymbol{b}_{j'} - \sum_{j'}^{n'} \delta_{jj'} \boldsymbol{b}_{j'} \\
&= \sum_{j'=1}^{n'} (\sum_{i=1}^{n} c_{ji} d_{ij'} - \delta_{jj'})
\end{aligned}$$

となる。よって係数 c_{ij}, d_{ij} を成分とする行列をそれぞれ C, D と書くと

$$CD = I_{n'}$$

同様に

$$DC = I_n$$

をうる。Binet-Cauchy の定理より、$n = n'$ でないときは、CD か DC のどちらかの行列式が 0 になってしまい、左辺の $|I| = 1$ と矛盾する。よって $n = n'$。 ∎

　これより、二つの独立な集合間の変換行列 (C とか D のこと) は正則であることもわかる。

　以上の議論をまとめると

Theorem 3.4 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ から $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ という m 個の一次独立なベクトルの集合を選び出し、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ をこれらの線形結合で表すことができる。この選び方は何通りもありうるが、m の値は一通りに決まる。

　今まで示したことから「n 次元ベクトルのうち、一次独立なものは n 以下」ということがわかる。
証明)
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は一次独立で、これですべてのベクトルを表すことができる。ここで

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$$

のなかで一次独立なのは n。また

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

のなかで一次独立なものは $m + s$ なので

$$n = m + s \geq m$$

∎

Theorem 3.5 m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_j (1 \leq j \leq m)$ があったとする。これより行列 $(A)_{ij} = a_{ij}$ を考える。A は (n, m) 型。これが一次独立なためには、A の n 個の行から m 個とった m 次行列式がすべて *0* ということはないことが必要十分。

　証明)
十分条件)

$$\boldsymbol{a}_1 c_1 + \boldsymbol{a}_2 c_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_m c_m = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_m) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

を考える。A から m 行だけ取り出した行列を A' とおくと、

$$A'\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

$\det A' \neq 0$ なので $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となり、確かに一次独立。
必要条件)
$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ から極大線形独立系を選ぶと

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_s}\}, \quad n = m + s$$

となる。また $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_s}\}$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の線形結合で表せる。
　もし $i_1 = m+1, i_2 = m+2, \cdots, i_s = n$ なら二つの基底の間の変換行列の行列式は 0 でないので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0$$

　一般には 1 から n のなかで $\{i_1, \cdots, i_s\}$ をとりさったのこりを $\{j_1, \cdots, j_m\}$ とおき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m & i_1 & \cdots & i_s \end{pmatrix}$$

という置換を施すと、

$$\begin{vmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{j_m 1} & \cdots & a_{j_m m} & & & \\ a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,m} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{j_1 1} & \cdots & a_{j_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_m 1} & \cdots & a_{j_m m} \end{pmatrix} \neq 0$$

よって、少なくともある行列式が 0 でないことが必要であることが示された。 ∎

Theorem 3.6 (Gram の行列式) m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_j (1 \leq j \leq m)$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m) \end{vmatrix} \neq 0 (> 0) \tag{3.4}$$

が必要十分条件である。この行列式を $Gram$ の行列式と呼ぶ。この行列はエルミート行列で行列式の値は非負である。

証明)
$\{\boldsymbol{y}_k\}$ を正規直交系とする。

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \boldsymbol{y}_k$$

と表せる。そこで A を α_{jk} を成分とする行列とすると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k) &= \sum_{j'=1,k'=1}^{n} \alpha^*_{jk'} \alpha_{kj'} (\boldsymbol{y}_{k'}, \boldsymbol{y}_{j'}) \\ &= \sum_{j'=1}^{n} \alpha^*_{jj'} \alpha_{kj'} \\ &= (A^* A^t)_{jk} = (AA^\dagger)^t_{jk}\end{aligned}$$

$|AA^\dagger|$ は Binet-Cauchy の定理よりベクトルの n 個の成分から m 個とったものの行列式の積で表せるが、この積は互いに複素共役の関係にあるので必ず正か、0。これが 0 ということは行列 A から m 個の列を選んで作った行列の行列式がすべて 0 ということ。よって定理 3.5 から、この Gram の行列式が 0 でないことが、$\boldsymbol{a}_j (1 \leq j \leq m)$ が一次独立であることの必要十分条件。 ∎

3.3　部分空間

(x, y, z) という三次元空間中で、$x-y$ 平面内のベクトルをいくら加えてもやはり $x-y$ 平面内のベクトルになる。これを**部分空間** (線形部分空間) と名づける。
今の議論を一般の n 次元ベクトルに拡張する。

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ なら必ず $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$
2. $\boldsymbol{a} \in W$ なら必ず $c\boldsymbol{a} \in W$(c はスカラー)

が成り立つとき、W は線形部分空間である。
有限個のベクトル、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ によって張られる部分空間とは

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m \boldsymbol{a}_m$$

で表されるベクトルの集合である (c_i はスカラー)。
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ すべてと直交するベクトル、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{m'}$ を考える。定義より

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_i) = 0$$

である。すると、

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{b}_{i_1} + \boldsymbol{b}_{i_2}) = 0, \qquad (\boldsymbol{a}_j, c\boldsymbol{b}_i) = 0$$

が成り立つので、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{m'}$ も線形部分空間になる。この $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{m'}$ を**直交補空間**とよぶ。

　例）

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $x-y$ 平面を張ることができる。すなわち

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は c_1, c_2 を動かすと $x-y$ 平面すべての点を表すことができる。これらのベクトルと直交する $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の張る

$$c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が直交補空間である。

注）

$\mathbf{0}$ も n 次元ベクトル空間全体も部分空間

　線形部分空間 W で r 個の独立なベクトルが存在し、$r+1$ 個以上は存在しないとき、

$$\mathrm{dim} W = r$$

とする。例えば n 次元ベクトル空間 V^n は

$$\dim V^n = n$$

であり、$\{\mathbf{0}\}$ は

$$\mathrm{dim}\{\mathbf{0}\} = 0$$

である。

　このとき、$\boldsymbol{x} \in W$ は線形独立な $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i$$

と表せる。c_i は一意的に決定される。このような $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ を**基底**と呼ぶ。$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{x}\}$ が一次従属なことに注意。

Theorem 3.7 $\dim W = r$ とする。$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ が一次独立なら $p \leq r$。さらに $r - p$ 個のベクトルを加えて W の基底、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が作れる。

証明)
$p = r$ なら $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ が基底。$p < r$ なら $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ の線形結合で表せない元が存在する。それを $\boldsymbol{a}_{p+1}$ とおくと、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}\}$ も一次独立。これを繰り返して $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ をうる。

∎

3.3.1　部分空間の和

$$\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \qquad \boldsymbol{x}_2 \in W_2$$

としたとき、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ のつくりベクトルの集合を $W = W_1 + W_2$ で表す。このとき

Theorem 3.8 (次元定理)

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \tag{3.5}$$

が成立する。

証明)
$\dim W_1 = r_1, \dim W_2 = r_2, \dim(W_1 \cap W_2) = r_{12}$ とおく。$W_1 \cap W_2$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}\}$ とおく。これに $r_1 - r_{12}$ 個、$r_2 - r_{12}$ 個の基底をそれぞれ加えたベクトルで W_1, W_2 を張る。

$$W_1 \to \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}, \boldsymbol{a}'_{r_{12}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_{r_1}\}$$
$$W_2 \to \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}, \boldsymbol{a}_{r_{12}+1}", \cdots, \boldsymbol{a}_{r_2}"\}$$

さて、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}, \boldsymbol{a}'_{r_{12}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_{12}+1}", \cdots, \boldsymbol{a}_{r_2}"\}$$

は $W_1 + W_2$ に属し、$W_1 + W_2$ の任意のベクトルはその線形結合で表せる。これらの線形結合を考え、

$$\boldsymbol{0} = \sum_{i=1}^{r_{12}} c_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=r_{12}+1}^{r_1} c'_j \boldsymbol{a}'_j + \sum_{k=r_{12}+1}^{r_2} c_k" \boldsymbol{a}_k"$$

とすれば、

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r_{12}} c_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=r_{12}+1}^{r_1} c'_j \boldsymbol{a}'_j}_{\in W_1} = \underbrace{- \sum_{k=r_{12}+1}^{r_2} c_k" \boldsymbol{a}_k"}_{\in W_2}$$

となるので、両辺とも $W_1 \cap W_2$ であることがわかる。よって

$$-\sum_{k=r_{12}+1}^{r_2} c_k{}'' \boldsymbol{a}_k{}'' = \sum_{i=1}^{r_{12}} c_i''' \boldsymbol{a}_i$$

となり

$$\sum_{k=r_{12}+1}^{r_2} c_k{}'' \boldsymbol{a}_k{}'' + \sum_{i=1}^{r_{12}} c_i''' \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$$

をうる。これより $c_i''' = c_k{}'' = 0$ をうる。さらにこれから $c_i = c_j' = 0$ ($\sum_{i=1}^{r_{12}} c_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=r_{12}+1}^{r_1} c_j' \boldsymbol{a}_j' = \mathbf{0}$ なので)。

　以上より、$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}, \boldsymbol{a}'_{r_{12}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_{12}+1}{}'', \cdots, \boldsymbol{a}_{r_2}{}''\}$ は一次独立。よって

$$\begin{aligned}\dim\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{12}}, \boldsymbol{a}'_{r_{12}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}'_{r_1}, \boldsymbol{a}_{r_{12}+1}{}'', \cdots, \boldsymbol{a}_{r_2}{}''\} &= r_{12} + r_1 - r_{12} + r_2 - r_{12} \\ &= r_1 + r_2 - r_{12} \\ &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)\end{aligned}$$

となる。 ∎

　尚、$W_1 \cap W_2 = \mathbf{0}$ のとき、$W_1 + W_2$ を**直和**という。一般に、m この部分空間 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ を考え、$\boldsymbol{x}_1 \in W_1, \boldsymbol{x}_2 \in W_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in W_m$ とする。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m$ というベクトル $\boldsymbol{x}$ のつくる集合を W とすると、直和の場合、

$$\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_m$$

である。

問

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

とする。$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の張る空間を W_1, $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の張る空間を W_2 としたとき、$\dim W_1, \dim W_2, \dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ。

問

W_1, W_2 を n 次元ベクトル空間の線形部分空間とする。以下を証明せよ。

1. $\dim W_1 + \dim W_2 > n$ なら $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$
2. $\dim W_1 = \dim W_2 = n - 1, \quad W_1 \neq W_2$ なら

$$\dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$$

3.4　正規直交系

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ などのように、集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ の要素が互いに

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0, \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

という関係にあるベクトルの集合を**直交系**、さらに

$$||\boldsymbol{a}_i|| = 1, \quad (1 \leq i \leq m)$$

が満たされている場合は**正規直交系**と呼ぶ。

問

$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が正規直交系になるように a, b, c を決定せよ。

　内積）
正規直交系でベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} d_j \boldsymbol{a}_j$$

とかけているとすると、その内積は

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i^* d_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i^* d_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i^* d_i
\end{aligned}$$

となる。これは前期にやった式である。そのときは正規直交系として暗に $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ を仮定していた。

Theorem 3.9 $\dim W = r, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p \in W$ で、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ が正規直交系なら $p \leq r$ である。このとき $r - p$ 個のベクトルを加えて W を張る正規直交系を作ることができる。

演習でやったように正規直交系は一次独立。よって定理 3.7 より、$p \le r$ である。$p < r$ のときは、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p\}$ に対して一次従属でないベクトル $\boldsymbol{a}$ が存在する。このとき

$$\boldsymbol{a}' = \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{a}" = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'$$

とおくと、$\boldsymbol{a}" \neq \boldsymbol{0}$ である ($\boldsymbol{0}$ なら $\boldsymbol{a}$ が一次従属になってしまう)。また

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}") = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}') = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}) = 0$$

なので $\boldsymbol{a}"$ は $\boldsymbol{a}_i \quad (1 \le i \le p)$ と直交。

$$\boldsymbol{a}_{p+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{a}"}{|\boldsymbol{a}"|}$$

とすれば、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{p+1}\}$ が正規直交系となる。これを繰り返せばよい。 ∎

3.4.1 Schmidt の直交化

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ が与えられたとする。この部分空間の正規直交化ベクトルをつくる方法が Schmidt の直交化である。これは以下の手順で行う。

1. まず $\boldsymbol{a}_1$ を規格化する。
$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}$$

2. 次に $\boldsymbol{a}_1$ と直交するように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合から $\boldsymbol{b}_2$ をつくってやる。
$$\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2'}{|\boldsymbol{b}_2'|}$$

3. 今度は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形結合から $\boldsymbol{b}_3$ をつくってやる。
$$\boldsymbol{b}_3' = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{b}_1 - (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3'}{|\boldsymbol{b}_3'|}$$

このように $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p\}$ という正規直交系がわかっていれば、

$$\boldsymbol{b}_{p+1}' = \boldsymbol{a}_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{p+1})\boldsymbol{b}_i, \quad \boldsymbol{b}_{p+1} = \frac{\boldsymbol{b}_{p+1}'}{|\boldsymbol{b}_{p+1}'|}$$

から $\boldsymbol{b}_{p+1}$ をつくることができる。このやり方を **Schmidt の直交化法**と呼ぶ。

問

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から正規直交系を作れ。

注)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= c_{11}\boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 &= c_{12}\boldsymbol{b}_1 + c_{22}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 &= c_{13}\boldsymbol{b}_1 + c_{23}\boldsymbol{b}_2 + c_{33}\boldsymbol{b}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

なので $\boldsymbol{a}_i$ をならべた行列、

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_p) = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_p) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる。$(\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_p)$ はユニタリ行列なので結局、

あらゆる行列はユニタリ行列と上三角行列の積で表せる

ことがわかる。

これは $\boldsymbol{QR}$ **分解**と呼ばれる、数値計算で大変実用性の高いものである。

3.4.2　直交補空間

$$\{\boldsymbol{y}; (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in W\}$$

というように部分空間 W の元、すべてと直交するベクトルの集合を直交補空間と呼ぶことは前に習った。この直交補空間を $W^\perp$ と記す。$W^\perp$ は線形部分空間である。このとき、

Theorem 3.10

$$V^n = W + W^\perp\ , \quad W \cap W^\perp = \{0\}$$

である。

証明)
$\boldsymbol{x} \in W, \boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ なら $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である。また $\dim W = r$ とし、W の正規直交基底として $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r\}$ を選ぶと、このとき、$(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}) = c_i$ として

$$\boldsymbol{x}" = \boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{b}_i \ , \ \boldsymbol{x}' = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{b}_i \ \ , \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}"$$

とすると、

$$(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}") = (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{r} c_j (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = c_i - c_i = 0$$

となる。よって $\boldsymbol{x}"$ は $W^{\perp}$ に属している。これより V^n のすべてのベクトルは $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}"$ とかけるので題意が証明される。 ∎

この定理と次元定理 3.8 より

$$\dim W^{\perp} = n - \dim W \tag{3.6}$$

となる。

問
以下を証明せよ。

i) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

ii) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

iii) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

3.5　行列のランク

n 次元ベクトル空間 V^n から V^m への写像

$$f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$$

が与えられたとする。A は (m, n) 型であるとする。このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすると、$\boldsymbol{x}$ が V^n 上すべてを動くとき、$A\boldsymbol{x}$ は V^m の部分空間となる。(部分空間の写像の行き先、$f(W)$ は部分空間を作る。)

ここで

$$f^{-1}(\boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{x}; \quad \boldsymbol{x} \in V^n, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

という $\boldsymbol{x}$ の集合は V^n の部分空間となる。これを**核** (**kernel**) と名づける。

Theorem 3.11

$$\dim f(V^n) = n - \dim f^{-1}(\mathbf{0}) \tag{3.7}$$

証明)
$f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l\}$ とおく。これから $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l, \boldsymbol{b}_{l+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ として、V^n の基底を作る。

$$\begin{aligned} f(V^n) &= \{f(\boldsymbol{b}_1), \cdots, f(\boldsymbol{b}_l), f(\boldsymbol{b}_{l+1}), \cdots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \\ &= \{f(\boldsymbol{b}_{l+1}), \cdots, f(\boldsymbol{b}_n)\} \end{aligned}$$

である。今、$f(\boldsymbol{b}_i) \quad (i = l+1, \cdots, n)$ の一次独立性を示すために線形結合、$\sum_{i=l+1}^{n} c_i f(\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{0}$ を考える。$f(\sum_{i=l+1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i) = \mathbf{0}$ なので $\sum_{i=l+1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i \in f^{-1}(\mathbf{0})$ である。よって

$$\sum_{i=l+1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{l} c_i \boldsymbol{b}_i$$

となる。これは $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l, \boldsymbol{b}_{l+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ の一次独立性により $c_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ を意味する。よって $f(\boldsymbol{b}_i) \quad (i = l+1, \cdots, n)$ は一次独立なので $f(V^n)$ の次元は $n - l$ ∎

$V^n \to V^n$ を考える。このとき $f^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ なら、f は一対一写像である。なぜなら $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V^n$ のとき、$f(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}$ とすると $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ が導かれるので。

一対一写像ということは逆行列が存在すれば良い。また一対一写像なら

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \leftrightarrow \dim f^{-1}(\mathbf{0}) = 0 \leftrightarrow \dim f(V^n) = \dim V^n = n$$

なのでこれは上への写像ということにもなる。

問 $\dim f(V^n) = n - \dim f^{-1}(\mathbf{0})$ の証明を真似て、

$$\dim f(W) = \dim W - \dim(f^{-1}(\mathbf{0}) \cap W) \tag{3.8}$$

を示せ。ここで W は V^n の部分空間である。

$\dim f(V^n)$ を行列 A の**階数** (**ランク**) と呼び、$\mathrm{rank}A$ とかく。(m, n) 型行列の列ベクトルを $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とかくと、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V^n$$

が写像 f により

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$$

に写されることがわかる。これより $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ ではられ、

$$\dim f(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ の一次独立なベクトルの数}$$

がわかる。

問 $\mathrm{rank} A = 0 \leftrightarrow A = 0$ を示せ。

Theorem 3.12 A, B をそれぞれ $(m, n), (n, l)$ 型行列とすると

$$\mathrm{rank} AB \leq \mathrm{rank} A, \mathrm{rank} B$$

証明)

$$\begin{aligned} \mathrm{rank} AB = \dim ABV^l &\leq \dim AV^n = \mathrm{rank} A \\ &\leq \dim BV^l = \mathrm{rank} B \end{aligned}$$

∎

Theorem 3.13 A を (m, n) 型、P, Q をそれぞれ $(m, m), (n, n)$ 型の正則行列とする。このとき、

$$\mathrm{rank} PAQ = \mathrm{rank} PA = \mathrm{rank} AQ = \mathrm{rank} A$$

証明)
上の証明より何かかけると次元 (階数) は必ずそれ以下になる。

$$\mathrm{rank} PA \leq \mathrm{rank} A = \mathrm{rank} P^{-1}(PA) \leq \mathrm{rank} PA \quad \rightarrow \quad \mathrm{rank} A = \mathrm{rank} PA$$

以下同様である。 ∎

A の階数は $r \leq m, n$ として A の中から $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ 個の (r, r) 型小行列式を計算し、そのうち一つでも 0 でないものが存在する最大の r と定義できる。なぜなら A の中には $r = \mathrm{rank} A$ 個の一次独立なベクトルが存在し、それ以上は一次従属であるからである (定理 3.5 参照)。これより次の定理が成り立つことがすぐわかる。

Theorem 3.14 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^t$

証明)
小行列式の値は転置しても変わらないから。 ∎

問 以下の行列のランクを求めよ。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

問 $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$ を示せ。

問 A, B をそれぞれ $(n,m), (m,l)$ 型とするとき、$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - m \leq \mathrm{rank}(AB)$ を示せ。

問 A, B, C はすべて (n,n) 型とする。$ABC = 0$ なら

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B + \mathrm{rank}C \leq 2n$$

を示せ。

3.5.1 rank の実際的な求め方

いちいち小行列式を計算していては面倒なのでもっと簡単なランクの求め方をここで学ぼう。これは逆行列の実際的な求め方に通じるものがある。
まず次の定理を証明しよう。

Theorem 3.15 行列 P が正則だとする。このとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立なら $P\boldsymbol{a}_1, P\boldsymbol{a}_2, \cdots, P\boldsymbol{a}_n$ も一次独立である。

証明)

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

のとき、両辺に P^{-1} をかけて

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

となる。条件より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立なので $c_i = 0$。よって $P\boldsymbol{a}_1, P\boldsymbol{a}_2, \cdots, P\boldsymbol{a}_n$ も一次独立。 $\blacksquare$

そこで P, Q が正則な行列とすると

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}PA = \mathrm{rank}AQ$$

が成立する。今、P として逆行列のところで学んだ基本変形を考える。

1.

$$P_n(i,j) = P_n(i,j)^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

は左からかけると i 行と j 行が交換され、右からかけると i 列と j 列が交換される。

2.

$$Q_n(i;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&& 0 & \\ && 1 &&&& \\ &&& c &&& \\ &&&& 1 && \\ & 0 &&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

は左からかけると i 行目が c 倍され、右からかけると i 列目が c 倍される。

3.

$$R_n(i,j;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & \dots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

は、左からかけると i 行目に j 行目の c 倍が加えられ、右からかけると i 列目に j 列目の c 倍が加えられる。

左からかける操作を**左基本変形**、右からかける操作を**右基本変形**と呼ぶ。二つをあわせて**基本変形**と呼ぶ。この基本変形を繰り返して (m,n) 型行列を

$$P_1P_2\cdots AP_1'P_2'\cdots P_{l'}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

という**標準形**にもっていけば階数がすぐ分かる。

例

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって階数は 2。

3.6　直交変換

V^n の中の一次独立なベクトルを $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ とおく。任意の $\boldsymbol{a}\in V^n$ は $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{a}_i$ で表せる。こうして V^n の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ を選べば、$\boldsymbol{x}$ は n 個の数の集まり $(x_1,\cdots,x_n)$

で特定できる。

$\boldsymbol{a}_i$ を行列 C で表される一次変換 f で変換すると、

$$\boldsymbol{a}'_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\boldsymbol{a_j}$$

という新しい基底 $\boldsymbol{a}'_i$ が得られる。このとき

$$(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

である。$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ として $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{a}_i$ で表すと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{a}_i = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= f\left((\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \\ &= f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

こうして

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が得られる。

さて、今度は同じベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $\{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n\}$ で表すことにする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i &= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

こうして

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}
$$

が示せる。

問　基底を行列 C で表せる変換で $(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)C$ に、$(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)$ を D で表せる変換で $(\boldsymbol{a}_1", \cdots, \boldsymbol{a}_n") = (\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)D$ に移したとき、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を表す係数 $(x_1, \cdots, x_n)^t$ と $(x_1", \cdots, x_n")^t$ の関係はどうなるか？

また、V^n の一次変換 f を $\boldsymbol{a}'_i$ を基底として表したとする。このとき f は A' という行列で

$$
f(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)A'
$$

で定義される。一方、

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) &= f((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)C) \\
&= f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)C \\
&= (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)AC \\
&= (\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n)C^{-1}AC
\end{aligned}
$$

となるので、基底を C で変換すると f の表現行列は

$$A' = C^{-1}AC \tag{3.9}$$

となる。

変換 A' と A は適当な行列 P を用いて $A' = P^{-1}AP$ という関係があるとき、**同値**と呼ばれる。

問　$P^{-1}ABP = A'B', A'^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$ を示せ。また、$A' = P^{-1}AP, A" = Q^{-1}A'Q$ のとき、$A"$ を A で表せ。

問　A、または B が正則なとき AB と BA は同値であることを示せ。

ここで内積を変えない変換を考える。この変換により正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は

$$\begin{aligned}
(f(\boldsymbol{e}_i), f(\boldsymbol{e}_j)) &= \delta_{ij} \\
&= (\sum_k U_{ki}\boldsymbol{e}_k, \sum_l U_{lj}\boldsymbol{e}_l) \\
&= \sum_{kl} U^*_{ki}U_{lj}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) \\
&= \sum_{kl} U^*_{ki}U_{lj}\delta_{kl} \\
&= \sum_k U^*_{ki}U_{kj} = (U^\dagger U)_{ij}
\end{aligned}$$

よって

$$U^\dagger U = I$$

となる。こうしてユニタリ行列 U は内積を変えないことが分かる (前出)。とくに実ユニタリ行列を**直交行列**と呼ぶ。

もし U がユニタリ行列ならノルムも変えないので

$$||f(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}||$$

となる。逆に f が長さを変えないと

$$\begin{aligned}
(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) &= (f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) - ||f(\boldsymbol{x})||^2 - ||f(\boldsymbol{y})||^2 \\
&= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) - ||f(\boldsymbol{x})||^2 - ||f(\boldsymbol{y})||^2 \\
&= ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 - ||\boldsymbol{x}||^2 - ||\boldsymbol{y}||^2 \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y})) &= ||\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}||^2 \\ &= ||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2-\mathrm{i}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+\mathrm{i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= (f(\boldsymbol{x})+\mathrm{i}f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})+\mathrm{i}f(\boldsymbol{y})) \\ &= ||f(\boldsymbol{x})||^2+||f(\boldsymbol{y})||^2-\mathrm{i}(f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}))+\mathrm{i}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))\end{aligned}$$

よって、

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))-(f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}))$$

となる。こうして

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))$$

をうる。よって**内積を変えないこととノルムを変えないことは同値である**ことが分かる。

問　直交行列の行列式を求めよ。

問　$A+\mathrm{i}B$ がユニタリなら $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列となることを示せ。ただし、A, B は実行列である。

問　$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ を実正規直交系としたとき、行列 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の行どうしは直交するか？

3.7　ベクトル空間の公理

数ベクトル以外でもベクトル空間を定義できることを以下で学ぶ。この概念は分かりづらいが、多くのことに応用できる。

ベクトル空間とは集合 V の要素 $\boldsymbol{x}$ が次の条件を満たしているものである。

(I) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対して和が定義され、

(I.1) $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_1$

(I.2) $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)$

(I.3) 足しても $\boldsymbol{x}$ の値が変わらない $\mathbf{0}$ が存在

(I.4) $\boldsymbol{x}$ に加えると $\mathbf{0}$ になる逆元 $-\boldsymbol{x}$ が存在

となる。
(II) スカラー倍が定義でき、$c\boldsymbol{x} \in V$。このとき

(II.1) $(c_1 c_2)\boldsymbol{x} = c_1(c_2\boldsymbol{x})$

(II.2) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(II.3) $c(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = c\boldsymbol{x}_1 + c\boldsymbol{x}_2$

(II.4) $(c+d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$

である。
　例)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$$

は m 次多項式である。これらをベクトルとみなすと上の条件をすべて満たしていることが分かる。この空間の次元は係数 $(c_0, c_1, \cdots, c_m)$ の次元と等しく $m+1$ である。
(III) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ にたいして**内積**が定義される。内積は以下を満たす。

(III.1) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x})$

(III.2) $(c\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) = c^*(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}_1, c\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x})$

(III.3) $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)^*$

(III.4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ で等号は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のときのみ。

この (III) を満たすベクトル空間は計量ベクトル空間と呼ばれる。このときベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さ (ノルム、norm) は

$$||\boldsymbol{x}|| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{3.10}$$

として定義される。
　例)
$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$ に内積を定義するには

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

とすればよい。

問 内積 (f,g) を $\int_0^{2\pi} f^* g \mathrm{d}x$ で定義するとき、

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\}$$

は正規直交系を作る。このとき、ベクトル

$$f_1 = c_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + c_{-1} \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + c_2 \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \cdots$$

と

$$f_2 = d_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + d_1 \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} + d_{-1} \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + d_2 \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} + \cdots$$

の内積 (f_1, f_2) の値はいくつか？

第4章　固有値と固有ベクトル

本章ではいよいよ行列の固有値問題を扱う。この固有値問題は行列の計算に役立つだけでなく、振動現象、量子力学、統計力学において物理的に重要な意味を持っているのでしっかり勉強してほしい。

4.1　固有値

ある一次変換を施したとき、この変換で方向が変わらないベクトルを $\boldsymbol{x}(\neq \boldsymbol{0})$ とする。

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

この $\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有ベクトルと呼び、λ を固有値と名づける。$\boldsymbol{x}$ が固有値ならその $c(\neq 0)$ 倍も固有ベクトルで、その固有値は λ のままである。

問　$\boldsymbol{x}$ が A の固有ベクトルなら、$\boldsymbol{x}$ の張る一次元空間 $W = \{\boldsymbol{x}_W; \boldsymbol{x}_W = c\boldsymbol{x}\}$ は A の不変部分空間になることを示せ。これを固有空間と呼ぶ。

(N, N) 型行列には一般に N 個の固有値が存在する。このとき

Theorem 4.1　A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である。

証明)
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ という固有値に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ とする。今これらが線形従属だとすると、

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}\}$$

は線形独立で

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_i\}$$

は線形従属となる $i(2 \leq i \leq k)$ が存在する。このとき

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_j \boldsymbol{x}_j$$

となるので、

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_j \lambda_j \boldsymbol{x}_j$$

となる。一方、

$$\lambda_i \boldsymbol{x}_i = \lambda_i \sum_{j=1}^{i-1} c_j \boldsymbol{x}_j$$

なので

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_i)\boldsymbol{x}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_i)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{i-1}(\lambda_{i-1} - \lambda_i)\boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{0}$$

となる。$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}\}$ は一次独立なので、固有値が異なる場合、$c_1 = c_2 = \cdots = c_{i-1} = 0$ となる。よって $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ となり固有ベクトルという仮定と矛盾する。 ∎

Theorem 4.2 A を n 次正方行列とする。適当な正則行列 P を選び、$P^{-1}AP$ が対角行列となる必要十分条件は、n 個の一次独立な固有ベクトルが存在することである。この固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ と書くと、これらを

$$P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n)$$

とならべた行列により、$P^{-1}AP$ が対角行列となる。

証明)
n 個の一次独立な $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ という固有ベクトルが存在したとする。その固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とする。すると

$$A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i$$

$$AP = (\alpha_1 \boldsymbol{p}_1 \quad \alpha_2 \boldsymbol{p}_2 \cdots \alpha_n \boldsymbol{p}_n) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となる。ちなみに P^{-1} は $\boldsymbol{p}$ の一次独立性により必ず存在する。

逆に式 (4.1) が成立しているとすると、

$$\{P\boldsymbol{e}_1, P\boldsymbol{e}_2, \cdots, P\boldsymbol{e}_n\} = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$$

とおくことで、$A\boldsymbol{p}_i = AP$ の i 列目は

$$P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

の i 列目に等しいので、これは $\alpha_i\boldsymbol{p}_i$ になる。というわけで P という変換行列の i 列目をとれば必ず固有ベクトルが得られる。P^{-1} が存在するのでこれらは一次独立。 ∎

　実際に固有値を求めるためには以下のようにする。まず

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \to (\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が非自明な解を持つためには

$$|\lambda I - A| = 0$$

を満たす λ を求めればよい。これは n 次方程式となる。この方程式 (4.1) を**特性方程式**または**固有方程式**と呼ぶ。また、$f(\lambda) = |\lambda I - A|$ を**特性多項式**とよぶ。

　A と同値 (相似) な行列とは $A' = P^{-1}AP$ となる行列である。この特性方程式は

$$|\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}| \quad |\lambda I - A| \quad |P| = |\lambda I - A|$$

となる。つまり相似な行列の固有値は等しい。n 次方程式は代数学の基本定理により、重複を含めれば必ず n 個の解をもつ。

問　上三角行列の k 乗

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^k$$

の固有値を求めよ。

問　行列

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

の固有値は A_{11}, A_{22} の固有値と等しいことを示せ。

問　AB と BA の特性方程式は同じものになることを示せ。もちろん A, B が正則なときはすぐに示せるが、そうでないときはどうなるか？

(ヒント:$A - \mu I$ が正則になるような μ をもってくると

$$|\lambda I - (A - \mu I)B| = |\lambda I - B(A - \mu I)|$$

となる。そこで $(A-\mu I)B$ の固有値は $\lambda(\mu)$ という関数になることを使う)

4.1.1　固有空間

・直和　$V=W_1+W_2$ で $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ のとき V は W_1 と W_2 の**直和**であるという。このとき

$$V=W_1\dot{+}W_2$$

とかく。これは 3 章で習った。

Theorem 4.3 A の異なる固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ に対する固有空間を $W_1,W_2,\cdots,W_n$ とすると、$W_1+W_2+\cdots+W_n$ は直和となる。

証明)

$$W_i\cap\{W_1+W_2+\overbrace{\cdots}^{(i)}+W_n\}=\{\mathbf{0}\}$$

を示せばよい。$\overbrace{\cdots}^{(i)}$ は i 番目の項を除くという意味である。この元は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\overbrace{\cdots}^{(i)}+\boldsymbol{x}_n$$

となるが、これは $\boldsymbol{x}_i$ が $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\overbrace{\cdots}^{(i)},\boldsymbol{x}_n$ で表せる、すなわち $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$ が一次従属ということになる。これは前に証明した定理 4.1 と矛盾する。よって $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となる。 ∎

Theorem 4.4 固有空間の次元 $\dim W_i$ は

$$\dim W_i\le\lambda_i\text{の重複度} \tag{4.2}$$

を満たす。

証明)
W_i の基底を $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\cdots,\boldsymbol{l}_p$ とおく。これに $\boldsymbol{l}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{l}_N$ を加えて V^N の基底を作ることができる。

$$A\boldsymbol{l}_j=\lambda_i\boldsymbol{l}_j\quad(1\le j\le p)$$

より

$$A(\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_N)=(\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_N)\begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & B \\ \vdots & & & \lambda_i & \\ & 0 & & & A'\end{pmatrix}$$

となり、

$$(\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_N)^{-1}A(\boldsymbol{l}_1,\cdots,\boldsymbol{l}_N)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & B \\ \vdots & & & \lambda_i & \\ & 0 & & & A'\end{pmatrix}$$

ここで相似な行列の固有値が等しいことを使うと A の固有値は行列

$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & B \\ \vdots & & & \lambda_i & \\ & 0 & & & A'\end{pmatrix}$$

の固有値に等しいことが分かる。

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & B \\ \vdots & & & \lambda_i & \\ & 0 & & & A'\end{pmatrix}-\lambda I\right|=(\lambda-\lambda_i)^p\det(A'-\lambda I)$$

より、重複度 $\geq p$ が分かる。 ∎

　さて、固有値 λ_i の重複度を p_i とおくと、$\sum_i p_i = N$ である。対角化のためには定理 4.2 より、一次独立なベクトルが N 個必要であり、さらに W_i は直和になっている。よって

Theorem 4.5 $P^{-1}AP$ が対角行列になるためには、A のすべての固有値に対する固有空間の次元 W_i が固有値の重複度と一致していることが必要十分条件である。

が示されたことになる。

　これはつまり固有方程式を解いて、

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\cdots=0$$

を得たとき、λ_1 に対しては一次独立な固有ベクトルが p_1 個、λ_2 に対しては一次独立な固有ベクトルが p_2 個 ⋯ 存在していることを意味する。

固有空間の次元は次の性質を持つ。

$$W_i = \{\boldsymbol{x} : (A - \lambda_i I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathrm{Kernel}(A - \lambda_i I)$$

より、

$$\dim W_i + \mathrm{rank}(A - \lambda_i I) = N$$

である。一方、$\dim W_i \leq p_i$ より

$$N - p_i \leq \mathrm{rank}(A - \lambda_i I)$$

よって A が対角化できるためには

$$N - p_i = \mathrm{rank}(A - \lambda_i I)$$

がすべての固有値に対して成立していることが、必要十分条件。
注)
対角行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

を $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ と簡略化して書くこともある。

4.1.2　対角化の応用

線形微分方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を考える。$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とすると、

$$P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y} = AP\boldsymbol{y}$$

となる。それゆえ

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P^{-1}AP\boldsymbol{y}$$

をえる。そこで $P^{-1}AP$ が対角行列になるように P を選ぶ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

より、

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 y_1, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \alpha_2 y_2, \cdots \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 y_n$$

となり、それぞれ

$$y_1 = D_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t}, \quad y_2 = D_2 \mathrm{e}^{\alpha_2 t}, \cdots, y_n = D_n \mathrm{e}^{\alpha_n t}$$

をえる。よって

$$\boldsymbol{x} = P \begin{pmatrix} D_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 t} \\ \vdots \\ D_n \mathrm{e}^{\alpha_n t} \end{pmatrix}$$

次に数列をとくことを考える。これは例を挙げてみてみよう。

$$x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$$

を解くためには、

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

より、

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_n$$

をうる。$\boldsymbol{x}_n = P\boldsymbol{y}_n$ として上式は

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P\boldsymbol{y}_n$$

となる。この P が行列を対角化する行列とすると、

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{y}_n$$

となる。こうして、

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \cdots, \alpha_n^k)\boldsymbol{y}_0$$

となるので漸化式が解ける。

問　実際にこの漸化式を解いてみよ。

4.2　ユニタリ空間

前章の最後の節で定義したように、線型空間 V が以下の公理を満たすとき、これをユニタリ空間と呼ぶ。

1) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x})$

2) $(c\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}) = c^*(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}_1, c\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x})$

3) $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)^*$

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ で等号は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ。

このとき

$$(A^\dagger \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$$

が成立する。

ここで $A^{-1} = A^\dagger$ となる行列を**ユニタリ行列**と呼ぶ。また、$A^\dagger = A$ となる行列は**エルミート行列**と呼ぶ。

問

1. ユニタリ行列の固有値はすべて $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}(0 \geq \theta_i < 2\pi)$ となることを示せ。
2. エルミート行列の固有値はすべて実数となることを示せ。
3. 反対称行列の固有値はどうなるか？

4.3　正規行列

$A^\dagger A = AA^\dagger$、交換関係を使って書くと $[A^\dagger, A] = 0$ となる行列を**正規行列**とよぶ。

問　エルミート行列、ユニタリ行列はともに正規行列であることを示せ。

Theorem 4.6 $U^\dagger AU$ が対角行列なら A は正規行列である。但し U はユニタリ行列とする。

証明)
$U^\dagger AU = D$ とおく。D は対角行列。このとき、

$$U^\dagger A^\dagger U = D^\dagger$$

さらに

$$U^\dagger AA^\dagger U = DD^\dagger = D^\dagger D = U^\dagger A^\dagger AU$$

∎

次の定理は実用的でしかも重要な意味を持つ。

Theorem 4.7 正規行列 A は次の性質を持つ。

i) 相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する

ii) $|\lambda I - A| = 0$ の根、λ_0 が k 重根なら

$$\mathrm{rank}(A - \lambda_0 I) = n - k$$

証明)
i) 任意の α に対して $A - \alpha I$ は正規行列である。

$$\begin{aligned} ||A\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u}||^2 &= (A\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{u}) \\ &= ((A^\dagger - \alpha^* I)(A - \alpha I)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \\ &= ((A - \alpha I)(A^\dagger - \alpha^* I)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \\ &= ((A^\dagger - \alpha^* I)\boldsymbol{u}, (A^\dagger - \alpha^* I)\boldsymbol{u}) \\ &= ||(A^\dagger - \alpha^* I)\boldsymbol{u}||^2 \end{aligned}$$

よって $A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$ なら $A^\dagger\boldsymbol{u} = \alpha^*\boldsymbol{u}$
　さて、$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ とおくと

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^\dagger\boldsymbol{v}) = \mu^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

よって $\lambda \neq \mu$ なら $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$。
ii)$\mathrm{rank}(A - \lambda_0 I) = n - l$ とする。このとき連立方程式

$$(A - \lambda_0 I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

は l 個の一次独立な解を持つ。これを $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_l$ とし Schmidt の直交化から正規直交系 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_l$ をつくる。これにさらに $n-l$ 個の基底を加えて正規直交系 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n$

をつくる。このとき $V=(\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_n)$ はユニタリ。このとき

$$\begin{aligned}AV &= (A\boldsymbol{v}_1\cdots A\boldsymbol{v}_l \quad A\boldsymbol{v}_{l+1}\cdots A\boldsymbol{v}_n)\\ &= (\lambda_0\boldsymbol{v}_1\cdots\lambda_0\boldsymbol{v}_l \quad A\boldsymbol{v}_{l+1}\cdots A\boldsymbol{v}_n)\\ &= (\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_l \quad \boldsymbol{v}_{l+1}\cdots\boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix}\lambda_0 I_l & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\end{aligned}$$

というように適当な行列 B, C を用いると変形できる。なぜなら $A\boldsymbol{v}_{l+1}=V\boldsymbol{a}$ とおけば $\boldsymbol{a}=V^\dagger A\boldsymbol{v}_{l+1}$ として決められるからである。こうして

$$V^\dagger AV=\begin{pmatrix}\lambda_0 I_l & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$$

　ここで正規行列の性質を使おう。$A^\dagger\boldsymbol{v}_i=\lambda_0^*\boldsymbol{v}_i$ より

$$V^\dagger A^\dagger V=\begin{pmatrix}\lambda_0^* I_l & B'\\ 0 & C'\end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_0 I_l & B\\ 0 & C\end{pmatrix} &= V^\dagger AV=(V^\dagger A^\dagger V)^\dagger=\begin{pmatrix}\lambda_0^* I_l & B'\\ 0 & C'\end{pmatrix}^\dagger\\ &= \begin{pmatrix}\lambda_0 I_l & 0\\ B'^\dagger & C'^\dagger\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより $B=0$ が示せるので

$$A=V\begin{pmatrix}\lambda_0 I_l & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}V^\dagger$$

$\lambda I=\lambda VV^\dagger$ として

$$A-\lambda I=V\begin{pmatrix}(\lambda_0-\lambda)I_l & 0\\ 0 & C-\lambda I_{n-l}\end{pmatrix}V^\dagger$$

この両辺の行列式をとって

$$|A-\lambda I|=(\lambda_0-\lambda)^l|C-\lambda I_{n-l}|$$

一方、

$$\begin{aligned}n-l &= \mathrm{rank}(A-\lambda_0 I)\\ &= \mathrm{rank}V\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & C-\lambda_0 I_{n-l}\end{pmatrix}V^\dagger\\ &= \mathrm{rank}(C-\lambda_0 I_{n-l})\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{rank}(C - \lambda_0 I_{n-l}) = n - l$$

である。この行列は$(n-l, n-l)$型なので一次独立なベクトルが$n-l$個あることになる。つまり$|C - \lambda_0 I_{n-l}| \neq 0$ よって$|A - \lambda I|$の根λ_0はl重根になる。つまり$l = k$となり題意が示される。 ∎

さて$|A - \lambda I| = 0$を解くとする。k重根があればk個の一次独立なベクトルが存在するので直交させることができ、これらをならべてUをつくれば

$$U^\dagger A U = U^\dagger (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \cdots) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$$

と対角化できる。こうして

Theorem 4.8 適当なユニタリ行列Uによって行列Aを対角化することができる必要十分条件はAが正規行列であるという条件である

ことが示される。

4.4　交換する行列

$AB - BA = [A, B] = 0$を満たす行列について次の定理が成り立つ。

Theorem 4.9 $[A, B] = 0$ならAとBは少なくとも一つは共通な固有ベクトルを持つ。

証明)
$A\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}$をみたす$\boldsymbol{x}$のつくる部分空間を$W$とおく。このとき

$$A(B\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x} = \alpha B\boldsymbol{x}$$

なので$BW \in W$となる。

この部分空間の基底を$\{\boldsymbol{l}_1, \cdots, \boldsymbol{l}_r\}$としこれに$n-r$個の基底を足してベクトル空間全体を$\{\boldsymbol{l}_1, \cdots, \boldsymbol{l}_n\}$ではると、

$$B\boldsymbol{l}_1 = \sum_{j=1}^{r} b_{j1} \boldsymbol{l}_j, \quad B\boldsymbol{l}_2 = \sum_{j=1}^{r} b_{j2} \boldsymbol{l}_j, \cdots, B\boldsymbol{l}_r = \sum_{j=1}^{r} b_{jr} \boldsymbol{l}_j$$

となるので

$$B(\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_r \boldsymbol{l}_{r+1} \cdots \boldsymbol{l}_n) = (\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_r \boldsymbol{l}_{r+1} \cdots \boldsymbol{l}_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} & \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} & B' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & \\ & 0 & & B" \end{pmatrix}$$

よってこの右辺に出てきた行列を $\tilde{B}$ とし、$P = (\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_r \boldsymbol{l}_{r+1} \cdots \boldsymbol{l}_n)$ とすれば $P^{-1}BP = \tilde{B}$ となる。この $\tilde{B}$ を

$$P' = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

を使って $\tilde{B}' = P'^{-1}\tilde{B}P'$ をつくり

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix}$$

を対角化し

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & B" \end{pmatrix}$$

という形にもっていく。こうして作った PP' という行列の第一列のベクトルは B の固有ベクトルになっており、また P' は A の固有空間内での線形結合を作るだけなので PP' の一列目は A の固有ベクトルにもなっている。 ∎

　さらに正規行列の場合、適当なユニタリ行列 U で対角化できる。このとき固有空間は直和になり $U = (\boldsymbol{l}_1 \cdots \boldsymbol{l}_n)$ を B にかけると上の定理より

$$BU = U \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

をうるので、$B_1, B_2, \cdots$ を対角化するユニタリ行列をそれぞれ $V_1, V_2, \cdots$ とすると

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \cdots \\ 0 & V_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

をつかって $(UV)^\dagger B(UV)$ は対角化される。

　さて

$$\begin{aligned} (UV)^\dagger A(UV) &= \begin{pmatrix} V_1^\dagger & 0 & \cdots \\ 0 & V_2^\dagger & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \cdots \\ 0 & V_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 I & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので、結局以下の定理が証明される。

Theorem 4.10 A, B が正規行列で $[A, B] = 0$ のとき、二つは同じユニタリ行列で対角化できる。

この定理は量子力学を解釈する上で非常に重要な役割を果たすので覚えておいてほしい。

4.5　射影

ユニタリ空間 V の部分空間 W と $W^{\perp}$ に対して、$V \in \boldsymbol{x}$ は一意的に

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}", \quad \boldsymbol{x}' \in W, \boldsymbol{x}" \in W^{\perp}$$

とあらわせる (定理 3.10)。
そこで $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ という変換を考え、これを**射影** P とよぶ。この P を**射影子**と呼ぶ。

Theorem 4.11 P は線形変換である。

証明)

$$\begin{aligned} P(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2) &= P(a\boldsymbol{x}_1' + b\boldsymbol{x}_2' + a\boldsymbol{x}_1" + b\boldsymbol{x}_2") \\ &= a\boldsymbol{x}_1' + b\boldsymbol{x}_2' \end{aligned}$$

一方

$$P(a\boldsymbol{x}_1) = a\boldsymbol{x}_1' = aP(\boldsymbol{x}_1), \quad P(b\boldsymbol{x}_2) = b\boldsymbol{x}_2' = bP(\boldsymbol{x}_2)$$

よって

$$P(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2) = aP(\boldsymbol{x}_1) + bP(\boldsymbol{x}_2)$$

∎

Theorem 4.12 P が射影子のためには

$$P^2 = P, P^{\dagger} = P$$

が必要十分。

証明)
必要条件) P が射影子なら $P^2 = P$。また

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_1", \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2' + \boldsymbol{x}_2"$$

とおくと、

$$(\boldsymbol{x}_1, P\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_1", \boldsymbol{x}_2') = (\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2') = (\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2' + \boldsymbol{x}_2")$$

よって、

$$(\boldsymbol{x}_1, P\boldsymbol{x}_2) = (P\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

一方

$$(\boldsymbol{x}_1, P\boldsymbol{x}_2) = (P^\dagger\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$$

これが任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に成立するので。
十分条件) $W = P(V)$ とおく。$\boldsymbol{x}' \in W$ なら

$$\boldsymbol{x}' = P\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0 \in V$$

という V の元が存在。よって

$$P\boldsymbol{x}' = P^2\boldsymbol{x}_0 = P\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}'$$

また、$\boldsymbol{x}" \in W^\perp$ に対しては P のエルミート性より

$$(P\boldsymbol{x}", \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}", P\boldsymbol{y}) = 0$$

これが任意の $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つので $P\boldsymbol{x}" = \boldsymbol{0}$。よって $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が成り立つ。 ∎

問　射影子の固有値は 1 か 0 であることを示せ。

　さて A が正規行列なら

$$U^\dagger AU = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = \alpha_1 \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & I & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} + \cdots$$

となるので

$$A = \alpha_1 U \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} U^\dagger + \alpha_2 U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & I & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} U^\dagger + \cdots$$

ここで I が出てくるのは固有値 α_i が重根になって可能性を考慮したためである。
　そこで

$$P_1 = U \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} U^\dagger, P_2 = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & I & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix} U^\dagger$$

とすると、

$$A = \sum_i \alpha_i P_i$$

とかける。このように A を分解するのを**スペクトル分解**とよぶ。

この P_i は射影子である。なぜなら

$$P_i^2 = P_i, P_i^\dagger = P_i$$

を満たすことが簡単に示せるので。また

$$P_i P_j = 0$$

も簡単に示せる。

逆に

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j, P_i^\dagger = P_i$$

を満たす P_i を用いて行列が

$$A = \sum_i \alpha_i P_i$$

とかければ

$$AA^\dagger = \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j^* P_i P_j = \sum_i \alpha_i \alpha_i^* P_i = A^\dagger A$$

となる。

問　スペクトル分解を用いて

1. A がエルミート行列 $\leftrightarrow$ 固有値は実数
2. A がユニタリ行列 $\leftrightarrow$ 固有値の絶対値は 1

を示せ。

問　行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

をスペクトル分解せよ。

4.6　行列の正定値

Theorem 4.13 エルミート行列 A の固有値がすべて正 *(*非負*)* であるためには、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して、

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0(\geq 0)$$

が必要十分条件。

証明)
A の固有値を $\alpha_i, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とおく。もし $\alpha_i > 0(\geq 0)$ なら、$\boldsymbol{x}$ を固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ の和 $\boldsymbol{x} = \sum_i^n c_i \boldsymbol{u}_i$ として

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \boldsymbol{u}_i$$

エルミート行列は正規行列なので固有ベクトルは直交している。よって、

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i}^{n} \alpha_i |c_i|^2$$

これより、$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0(\geq 0)$ が示される。
逆に任意の $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ について $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0(\geq 0)$ なら、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_i$ として、

$$(A\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i) = \alpha_i > 0(\geq 0)$$

∎

このような行列を正値 (半正値) エルミート行列と呼ぶ。H がエルミート行列なら H^2 は必ず半正値エルミート行列である。なぜなら H の固有値は実数で、H^2 の固有値はその 2 乗となるからである。

また任意の行列 A を考えたとき、$AA^\dagger$ は必ず半正値エルミート行列となる。なぜなら

$$(AA^\dagger \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^\dagger \boldsymbol{x}, A^\dagger \boldsymbol{x}) = ||A^\dagger \boldsymbol{x}||^2 \geq 0$$

となるからである。

問　A が正則なら $AA^\dagger$ は必ず正値になることを示せ。

さて、A が正値（半正値）エルミート行列なら $B^2 = A$ となる B という正値（半正値）エルミート行列が存在する。なぜなら $A = \sum_i \alpha_i P_i$ とスペクトル分解すると、

$$B = \sqrt{A} = \sum_i \sqrt{\alpha_i} P_i$$

は正値（半正値）エルミート行列になり、これは確かに $B^2 = A$ を満たしているので。

ところで任意の複素数 $u = a + \mathrm{i}b$ は $\sqrt{uu^*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とかけた。行列には似たようなことができるのであろうか？そこで 0 でない数を正則行列に対応づけ、、正の実数は正値エルミート行列、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ はユニタリ行列に対応させて考えると、次の定理が成り立つことが予想される。

Theorem 4.14 任意の正則行列 A は正値エルミート行列 H とユニタリ行列 U の積として一意的にあらわすことができる。

証明)
$H = \sqrt{AA^\dagger}$ は正値エルミート行列。ここで $U = H^{-1}A$ とおくと、

$$UU^\dagger = H^{-1}AA^\dagger(H^{-1})^\dagger = H^{-1}H^2H^{-1} = I$$

となり、U はユニタリ行列となる。

一意性は以下のようにして示せば良い。別のあらわ仕方が有ったとして $A = H'U'$ とすると、

$$H'U' = HU \quad \to H' = HUU'^\dagger$$

一方、$H' = H'^\dagger = U'U^\dagger H$ より、

$$H'^2 = HUU'^\dagger U'U^\dagger H = H^2$$

となる。この H^2, H'^2 をユニタリ行列 V で対角化すれば

$$V^\dagger H^2 V = (V^\dagger HV)^2 = (V^\dagger H'V)^2 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

となり、

$$V^\dagger HV = V^\dagger H'V = \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{\alpha_n})$$

が示されるので、$H = H'$。これから $U = U'$ が導かれるので結局一意的にあらわされることがわかる。 ∎

4.6.1　実対称行列

エルミート行列の中で行列要素がすべて実数のものを**実対称行列**とよぶ。固有値は実数で、特性方程式 $\det(A - \alpha I)$ の解を α_i とすると、

$$(A - \alpha_i I)\boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}$$

の解は実の非自明解を持つ。つまり固有ベクトルは実数ととれる。よって変換行列 U も行列要素を実数とすることができる。このように成分が実のユニタリ行列を**直交行列**とよび、通常 O と書く。ゼロ行列と紛らわしいので注意。

問

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ。

4.6.2　2 次形式

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の 2 次関数、

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

を 2 次形式と名づける。ここで $x_i x_j$ の係数は $(a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$ なので a_{ij} の選び方は任意性がある。そこで $a_{ij} = a_{ji}$ という条件を付け加える。すると a_{ij} を行列要素とする A は実対称行列になり

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$$

となる。ここで A を対角化する行列を O とおくと、

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \boldsymbol{x}^t O O^t A O O^t \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{y}^t \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \boldsymbol{y} \\ &= \sum_i \alpha_i y_i^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $\boldsymbol{y} = O^t \boldsymbol{x}$ である。さらに $y_i = z_i / \sqrt{|\alpha_i|}$ とおくと、固有値を大きさの順にならべて

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$$

をうる。これを二次形式の標準形とよぶ。上式のように係数が正のものが p 個、負のものが q 個あるとき、2 次形式の符号は (p, q) であるという。

4.6.3　主小行列

A_k とは行列 A の最初の k 行 k 列をとってきたものである。これを使うと、行列の正値性がわかる。

Theorem 4.15 実対称行列 A にたいして、$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} > 0$ がすべての $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{x}$ に対して成り立っているためには、$\det A_k > 0$ が必要十分条件である。ここで $|A_k|$ は**主小行列式**である。

必要条件)
$\boldsymbol{x}$ として最初の k 行以外はすべて 0 のベクトル $\boldsymbol{x}_k$ をとると、

$$0 < \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k^t A_k \boldsymbol{x}_k$$

A_k は実対称行列なので対角化でき、定理 4.13 より固有値はすべて正ということがわかる。よって $\det A_k > 0$。
十分条件)
数学的帰納法で示す。$n-1$ のとき、この定理が成立していると仮定する。($n=1$ なら確かに成立している。) この仮定より、$|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_{n-1}| > 0$ が成り立っていれば、$\boldsymbol{x}_{n-1}^t A_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} > 0$ が成立。そこで (n,n) 型行列 A を

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & B \\ B^t & c \end{pmatrix}$$

とかく。c はスカラーである。

$$A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ B^t A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0^t & c - B^t A_{n-1}^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}B \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

とかけるので

$$D = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0^t & c - B^t A_{n-1}^{-1} B \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}B \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^t D\boldsymbol{y}$$

D が正定値なら $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$ も正定値。

$$|A| = |A_{n-1}|(c - B^t A_{n-1}^{-1}B), \quad |A| = |A_n| > 0, \quad |A_{n-1}| > 0$$

より、$e = c - B^t A_{n-1}^{-1}B > 0$ となる。こうして

$$\boldsymbol{y}^t D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{n-1}^t A_{n-1}\boldsymbol{y}_{n-1} + e y_n^2 > 0$$

こうして正値が示される。 ∎

問　逆に $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} < 0$ のためには $(-1)^k|A_k| > 0$ が必要十分であることを示せ。

4.6.4 アダマール (Hadamard) の不等式

正値エルミート行列の性質を用いて、以下のことがわかる。
i) A を正値エルミート行列とする。このとき

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^t & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とし、

$$\det A = a_{nn} \det A_{n-1} - \boldsymbol{b}^t \mathrm{adj} A_{n-1} \boldsymbol{b}$$

よって、

$$|A| \leq a_{nn}|A_{n-1}| \leq a_{nn}a_{n-1n-1}|A_{n-2}| \leq \cdots \leq \prod_i a_{ii}$$

が成立する。等号は各ステップで $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ なら成り立つので対角行列の場合である。
ii) A を任意の行列とする。このとき

1. $\det A = 0$ なら $\det A^\dagger A = 0$

2. $\det A \neq 0$ なら $B = A^\dagger A$ は正値エルミート。よって、

$$\det A^\dagger A = |\det A|^2 \leq \prod_i b_{ii}, \quad b_{ii} = \boldsymbol{a}_i^\dagger \boldsymbol{a}_i = |\boldsymbol{a}_i|^2$$

   こうして

$$0 < |\det A| \leq ||\boldsymbol{a}_1|| \times ||\boldsymbol{a}_2|| \times \cdots \times ||\boldsymbol{a}_n|| = \prod_{i=1}^n ||\boldsymbol{a}_i||$$

   等号が成立するのは $b_{ij} = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0 (i \neq j)$、すなわち $\boldsymbol{a}_i$ が互いに直交するときである。

以上はアダマールの不等式と呼ばれている。

4.7 その他の話題

4.7.1 ケーリー・ハミルトンの定理

行列が対角化できない場合でも、必ずユニタリ行列でジョルダン標準形に持っていけることがわかっている。これを使うとケーリー・ハミルトンの定理が証明できる。

Theorem 4.16 任意の行列 A に対して特性多項式、$f(\lambda) = |\lambda I - A|$ を考える。このとき

$$f(A) = 0$$

これは (2,2) 型なら証明はすぐできる。また、行列が対角化できるときも簡単に証明できる。対角化できないときでも成立しているのがみそである。

その証明は以下のようにする。まず以下を証明する。

Theorem 4.17 正則行列 P を適当に選ぶと $P^{-1}AP$ は必ず上三角行列に書ける。対角成分には固有値が並ぶ。つまり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

証明) 固有方程式を解いて $A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{p}_1$ となる $\boldsymbol{p}_1$ を求める。$\boldsymbol{p}_1$ と線形独立なベクトルを足して，$Q_1 = (\boldsymbol{p_1}, *, \cdots, *)$ を作れば

$$AQ_1 = Q_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

よって

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

こんどは A_2 に関して同様に固有方程式，固有ベクトルを一つずつ求める。固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ に基底を加えて作った行列を P_2 とおく。$\boldsymbol{p}_2, P_2$ の次元は $(n-1)$ である。

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

を使うと

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

以下同様にして，定理は証明される。 ∎

固有方程式を因数分解する。

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)\,. \tag{4.8}$$

これより

$$\begin{aligned}&(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I) \\ &= PP^{-1}(A-\lambda_1 I)PP^{-1}(A-\lambda_2 I)P\cdots P^{-1}(A-\lambda_n I)PP^{-1} \\ &= PO_nP^{-1}\end{aligned} \tag{4.9}$$

$P^{-1}(A-\lambda_1 I)PP^{-1}(A-\lambda_2 I)P\cdots P^{-1}(A-\lambda_n I)P = 0_n$ は実際に代入してみるとわかる。

4.7.2 Gersgorin の定理

この定理は非常に簡単だが固有値の位置を見積もるのに大変役に立つ。

Theorem 4.18 行列 A の j 番目の行に対して

$$\rho_j = \sum_{k=1}^{n}{}' |a_{jk}|$$

を考える。和は $k=j$ を除く。これから複素平面に半径 ρ_j、中心 a_{jj} の円を描く。こうしてできた n 個の円の中に行列の固有値はすべて入っている。

さらに m 個の円の集合が残りの $n-m$ 個と交わっていかなれば、固有値はこの m 個の円の中にちょうど m 個入っている。

証明)
λ を固有値、$\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルとする。$\lambda\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ である。これより

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = \lambda x_j$$

ここでこの固有ベクトルの最大の成分を p とする ($|x_p| = \max_j |x_j|$)。すると p 番目の成分は

$$|\lambda - a_{pp}||x_p| = \left|\sum_{k=1}^{n}{}' a_{pk}x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}{}' |a_{pk}||x_k| \le |x_p|\sum_{k=1}^{n}{}' |a_{pk}|$$

$x_p \neq 0$ なので題意が証明される。

後半は $A = D + C$ と分解し、$D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ として、$B(t) = D + tC$ として $t = 0 \to 1$ の振る舞いを考えることで、証明される。 ∎