統計力学 II(2006)試験問題

試験日 1 月 26 日　時間 09:15-10:45　教室 8-208　科目名 統計力学 II　担当 後藤(3-335B)

【注意】途中の計算を必ず書いて下さい。結果だけの解答は採点出来ません。A4 手書メモ 1 枚持込可

1. 面積 A の板面に閉じ込められた N 個の粒子の状態密度 D_0 を求めましょう。但しこの問ではスピン縮退は考えなくとも良いです(問 2 以降では、自分で判断して下さい)。

2. 粒子が $1\!/\!_2$ のスピンを持つフェルミオンであるとします。磁場 H を印加した場合の粒子数保存の式を導きましょう。
   ヒント—スピンの z 成分が $S_z = \pm 1\!/\!_2$ である粒子のエネルギー $\varepsilon_\pm$ は $\varepsilon_\pm = \varepsilon \pm \mu_\mathrm{B} H$ のようになります。

3. 上式を、縦軸＝エネルギー、横軸＝状態密度のグラフにして下さい。ヒント—横軸を左右両側に取って、左側を $S_z = +1\!/\!_2$ の粒子の状態密度、右側を $S_z = -1\!/\!_2$ の粒子の状態密度にしましょう。

4. 問 2 の粒子数の表式から、絶対零度における化学ポテンシャルの磁場依存性を求めましょう。
   ヒント—絶対零度です。

5. 磁化 M を求めましょう。
   ヒント—磁化の定義は $M = (N_+ - N_-)\mu_\mathrm{B}$ です。

6. 内部エネルギー E を求めましょう。ヒント—積分の中で $f(\varepsilon)$ の ε は磁場で値がずれません。

7. 熱力学の公式 $P = -\left.\dfrac{\partial E}{\partial A}\right)_{S,N}$ から粒子数一定とした場合の圧力(縮退圧)の磁場依存性を求めましょう。
   ヒント—二次元ですから、体積でなく面積 A で微分することになります。

8. おまけ問題)フェルミエネルギ ε_F を、波数、波長、角周波数、温度、エレクトロンボルト、速度、運動量の次元に直した式を書きましょう。

9. ボースアインシュタイン凝縮1
   スピンを持たないボソンが、問 1 で示した状態密度を持つ場合、ボースアインシュタイン凝縮を示すかどうかを、粒子数保存の式 $N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f_\mathrm{B}(\varepsilon) d\varepsilon$ から調べましょう。
   ヒント— $x = \beta\varepsilon$ とおいて変数変換して、分母をテイラー展開しましょう。

10. ボースアインシュタイン凝縮2
   状態密度が $D(\varepsilon) = \varepsilon^n$ のようにエネルギーのべきで表される場合、ボースアインシュタイン凝縮が起こる条件を調べましょう。また、物理的な理由を考えて見ましょう。
   ヒント—知っている例(1～3次元の井戸型ポテンシャル、1～3次元の調和振動子)について調べて見て、どこに凝縮するかを考えましょう。

1. 面積 A の板面に閉じ込められた N 個の粒子の状態密度 D_0 を求めましょう。問 1 ではスピン縮退は考えなくとも良いです。

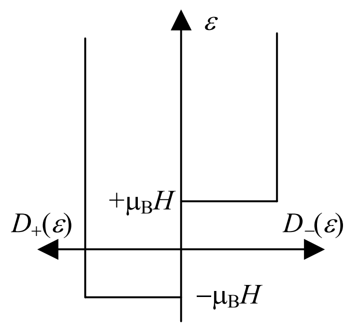
$$\frac{Ad^2\vec{k}}{(2\pi)^2}=\frac{A2\pi k\,dk}{(2\pi)^2}=\frac{Ak\,dk}{(2\pi)}=\frac{Ak}{(2\pi)}\frac{dk}{d\varepsilon}d\varepsilon=\frac{Ak}{(2\pi)}\frac{1}{\hbar^2 k/m}d\varepsilon=\underbrace{\frac{Am}{2\pi\hbar^2}}_{D_0}d\varepsilon$$

※ここで間違えた人も、間違えた状態密度をきちんと代入して計算した場合は加点しました。

2. 粒子が ½ のスピンを持つフェルミオンであるとします。磁場 H を印加した場合の粒子数保存の式を導きましょう。ヒント―$S_z=\pm\frac{1}{2}$ である粒子のエネルギー $\varepsilon_\pm$ は磁場で、$\varepsilon_\pm=\varepsilon\mp\mu_{\mathrm{B}}H$ になるとします。

$$N=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(D_+(\varepsilon)+D_-(\varepsilon)\right)f(\varepsilon)d\varepsilon,\ \text{但し}\ D_\pm(\varepsilon)=D(\varepsilon\pm\mu_{\mathrm{B}}H)$$

3. 上式を、縦軸＝エネルギー、横軸＝状態密度のグラフにして下さい。ヒント―横軸を左右両側に取って、左側を $S_z=+\frac{1}{2}$ の粒子、右側を $S_z=-\frac{1}{2}$ の粒子の状態密度にすると判りやすいです。
※ $D(\varepsilon)$ が不連続なのに、テイラー展開して M=0 とした人多数。orz



4. 粒子数の表式から、絶対零度における化学ポテンシャルの磁場依存性を求めましょう。ヒント―絶対零度なので、フェルミ分布関数は $0\sim\varepsilon_{\mathrm{F}}$ の積分に置き換えられて簡単になります。

$$N=N_++N_-=\int_{-\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}D_+(\varepsilon)d\varepsilon+\int_{+\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}D_-(\varepsilon)d\varepsilon=D_0\int_{-\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}d\varepsilon+D_0\int_{+\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}d\varepsilon$$

$$=D_0\cdot(\varepsilon_{\mathrm{F}}+\mu_{\mathrm{B}}H)+D_0\cdot(\varepsilon_{\mathrm{F}}-\mu_{\mathrm{B}}H)=2D_0\varepsilon_{\mathrm{F}}$$ よって、ε_{F} に磁場依存性はない。

5. 磁化 M を求めましょう。ヒント―磁化の定義は $M=(N_+-N_-)\mu_{\mathrm{B}}$ です。

$$M=(N_+-N_-)\mu_{\mathrm{B}}=D_0\cdot(\varepsilon_{\mathrm{F}}+\mu_{\mathrm{B}}H)\mu_{\mathrm{B}}-D_0\cdot(\varepsilon_{\mathrm{F}}-\mu_{\mathrm{B}}H)\mu_{\mathrm{B}}=2D_0\mu_{\mathrm{B}}^2H$$

6. 内部エネルギー E を求めましょう。ヒント―積分の中で $f(\varepsilon)$ と ε は磁場で値がずれません。

$$E=\int\left(D_+(\varepsilon)\varepsilon+D_-(\varepsilon)\varepsilon\right)f(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$=\int_{-\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}D_+(\varepsilon)\varepsilon\,d\varepsilon+\int_{+\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}D_-(\varepsilon)\varepsilon\,d\varepsilon=D_0\int_{-\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\varepsilon\,d\varepsilon+D_0\int_{+\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\varepsilon\,d\varepsilon$$

$$=D_0\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big|_{-\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\Big|_{+\mu_{\mathrm{B}}H}^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)$$

$$=D_0\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}^2-(\mu_{\mathrm{B}}H)^2\right)\qquad ;\ D_0=\frac{2\pi mA}{h^2}\ \text{（片スピン分）}$$

7. 熱力学の公式 $P = -\left.\dfrac{\partial E}{\partial A}\right)_{S,N}$ から粒子数一定とした場合の圧力を求めましょう。ヒント—二次元ですから、体積でなく面積 A で微分することになります。

$E = D_0\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}^2 - (\mu_{\mathrm{B}}H)^2\right) = \dfrac{N}{2\varepsilon_{\mathrm{F}}}\left(\varepsilon_{\mathrm{F}}^2 - (\mu_{\mathrm{B}}H)^2\right)$ より、$P = -\left(\dfrac{\partial E}{\partial A}\right)_{S,N} = -\dfrac{N}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{\mathrm{F}}}{\partial A} - \dfrac{\partial \varepsilon_{\mathrm{F}}^{-1}}{\partial A}(\mu_{\mathrm{B}}H)^2\right)$

$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \dfrac{N}{2D_0} = \dfrac{N\pi\hbar^2}{Am}$ などを使って、

$$P = -\frac{N}{2}\cdot\left(-\frac{N\pi\hbar^2}{A^2 m} - \frac{m(\mu_{\mathrm{B}}H)^2}{N\pi\hbar^2}\right) = \frac{N}{2}\cdot\left(\frac{N}{2D_0 A} + \frac{2D_0(\mu_{\mathrm{B}}H)^2}{AN}\right) = \frac{N\varepsilon_{\mathrm{F}}}{2A}\left(1 + \frac{(\mu_{\mathrm{B}}H)^2}{\varepsilon_{\mathrm{F}}^2}\right)$$

※$O(H^2)$の項を出せた人は結局居ませんでした。初項の正解者は 2 名（K 君、S 君）でした。多くの人は $\varepsilon_{\mathrm{F}} = \varepsilon_{\mathrm{F}}(A)$ であることを忘れて不の圧力を堂々と答案に書いてしまっていたようです。orz

8. おまけ
フェルミエネルギーを、波数、波長、周波数、角周波数、温度、エレクトロンボルト、速度の単位で表した式を書きましょう。$\varepsilon = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} = \dfrac{h^2}{2m\lambda^2} = h\nu = \hbar\omega = k_{\mathrm{B}}T = eV = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$

9. ボースアインシュタイン凝縮1
スピンを持たないボソンが、問 1 で示した状態密度を持つ場合、ボースアインシュタイン凝縮を示すかどうか粒子数保存の式 $N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f_{\mathrm{B}}(\varepsilon) d\varepsilon$ から調べましょう。ヒント— $x = \beta\varepsilon$ とおいて変数変換して、分母をテイラー展開しましょう。

$\mu \to 0$ で級数和がいくらでも大きくなれるので BEC はおきない。計算略、講義で何回もやりました。

10. ボースアインシュタイン凝縮2
状態密度が $D(\varepsilon) = \varepsilon^\alpha$ のようにエネルギーのべきで表される場合、ボースアインシュタイン凝縮が起こる条件を調べましょう。また、物理的な理由を考えて見ましょう。ヒント—知っている例(1～3次元の井戸型ポテンシャル、1～3次元の調和振動子)について調べて見て、どこに凝縮するかを考えましょう。

井戸型は一次元($D{\sim}1/\sqrt{\varepsilon}$)、二次元($D{\sim}\varepsilon^0$)、調和振動子は一次元($D{\sim}\varepsilon^0$)で BEC は起こらない。これらの系では $\varepsilon = 0$ で零でない状態密度が存在するので、$T \to 0$ にしても $\mu \to 0$ に漸近させれば励起状態の粒子数を保持できる。