第 9 回　　　　ハミルトニアン　　　3-371/1100-1235,　　　　15, June　2001

これまで、オイラーラグラングランジュ方程式は最小作用の原理だけから導いたので、座標系のとりかたによらず不変であると述べてきました。たとえば極座標によってラグランジアンを書いても、方程式は、

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$ と $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$ と、全く同じ形のままでした。

しかしニュートンの運動方程式 $f_i = ma_i$ ではそうは行きません。簡単な形であるのはデカルト座標の時だけで、すでに示したように極座標にした途端に複雑になってしまいます。これはいかに旨い変換を行うかが問題を解く鍵であることを示しています。ラグランジアンが簡単な形になるように座標変換をすればよいのです。たとえば、前回の多体系の基準座標でラグランジアンを書きなおせば、$L = \dot{x}_1^2 + w_1^2 \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + w_2^2 \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + w_3^2 \dot{x}_3^2 + \cdots$ となるのです。

今回は単なる座標変換ではなく、全く新しい変数を使ったらどうなるか、という話です。話の中身は二つあります。

1. ひとつは、$L(q,\dot{q})$ のように座標 q と速度 $\dot{q}$ を変数にするのではなく、座標 q と一般化運動量 $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を変数とする何か新しい関数 $H(q,p)$ を考えて、この H が満たす運動方程式を探してみようというわけです。もちろん、デカルト座標での自由な質点の場合一般化運動量は $\frac{\partial\left(m\dot{x}^2/2\right)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ に一致しますし、二次元極座標

では、$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{q}^2\right)$より、$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$及び$p_q=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=mr^2\dot{q}$です。

これが今回の主題です。

2. 二つめの話は、これまでの座標変換はあくまで座標同士の変数変換でした。これを拡張して、$x+p$あるいは$q+\dot{q}$なんかを新しい変数にしてしまったらどうなるでしょうか。実はこれをやってしまうといくらラグランジュ方程式でもそのまま成り立つ、というわけには行かなくなります。しかし、こういう変数変換を使ってはじめて解ける、という問題は山ほどあります。理論の仕事はハミルトニアンの対角化と、この正準変換と呼ばれる「おかしな変換」をいかに見つけるか、という二つである、と云っても過言ではありません(過言かも)。こちらは次回以降にやります。

さて、1. の変数変換は、実は、皆さんはすでに去年、習っているはずです。どういう話かと云うと、二つの変数S ,Vを持つある関数$U(S,V)$があって、

$T=\frac{\partial U}{\partial S}(S,V)$　及び、$-P=\frac{\partial U}{\partial V}(S,V)$であるとき、すなわち、

$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)dS+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)dV=TdS-PdV$、が成り立っているとします。

この$U(S,V)$を変数Vはそのままで､Sのかわりに$T=\frac{\partial U}{\partial S}(S,V)$を変数として持つ関数$F(V,T)$に変換し、かつ、$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)=S$となるようにしたい、ということです。

去年った処方箋ではともかく$F=U-TS$と置けばよい、というものでした(こう

いう習い方はしなかったかな)。こう置くと、

$$dF = dU - SdT - TdS$$

ですから、上の $dU = TdS - PdV$ の表式を代入してやれば、

$$dF = SdT - PdV$$

となって、全微分を取ったのですから出てきた微変数を見れば、確かに変数は V と T となっていることがわかります。また、偏微分の定義から、

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)dV$$

ですから、$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) = S$ も成り立っています。

但し、詳しく言えば、$F = U - TS$ そのままではダメです。なぜなら、右辺の変数は S と V だからです。よって、$U - TS$ に対し、$T = \frac{\partial U(S,V)}{\partial S}$ の逆変換 $S = S(T,V)$ を代入して V と T に直したものが F であるということになります。

さて、ハミルトニアンの場合も全く一緒です。$L(q,\dot{q})$ という関数を $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ という新しい変数に対する新しい関数 $H(q,p)$ で表したいわけです。アナロジーを示しますと、

$$U(S,V) \rightarrow \qquad T = \frac{\partial U(S,V)}{\partial S}, \quad F = U - TS \qquad \rightarrow F(V,T)$$

$$L(q,\dot{q}) \rightarrow \qquad p = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad -H = L - ?\cdot ? \qquad \rightarrow H(q,p)$$

ですから、上下を見比べて $-H = L - p\dot{q}$ と置けばよいことになります。$-H$ にしたのは、そうした方が H がエネルギーに等しくなるので便利だからです。

もちろん、$L=L(q,\dot{q})$なのですから、このままでは左辺は$H(q,\dot{q},p)$で、q、$\dot{q}$、pの関数になってしまっているので、$\dot{q}$を$p=\dfrac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}$の逆変換で消してやって初めて、$H=H(q,p)$となります。逆変換などと言うと難しそうですが、デカルト座標なら、「$p=m\dot{q}$の逆変換は$\dot{q}=p/m$だ」と言っているに過ぎません。

以上のような変数の変換を Legendre 変換といいます。あのラッキーセブンの公式は全て、ルジャンドル変換です。
$$\begin{array}{ccc} S & E & (V) \\ H & & F \\ P & G & (T) \end{array}$$

次にLはオイラーラグランジュ方程式を満たしているのですから、それを変換した$H=H(q,p)$が満たす方程式を求めましょう。それにはHの微分をとってみます。すると、

$$dH=\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)dq+\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)dp$$

となりますが、これは$H=H(q,p)$なのですから、あたりまえです。

一方、H導入の定義からは、

$$dH=d\left(p\dot{q}-L(q,\dot{q})\right)=\dot{q}dp+pd\dot{q}-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)dq-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)d\dot{q}$$

です。一般化運動量の定義から$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=p$ですから 2 項目と 4 項目は打ち消し合って消えてしまいます。よって、

$$dH=-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)dq+\dot{q}dp$$

となります。

(厳密には右辺はqとpの関数ですから、消えてしまう 2 項目と 4 項目も

$d\dot{q} = d\dot{q}(q, p) = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right) dq + \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right) dp$ などとしておかねばならないのですが、所詮消えてしまうので気にしないことにします。)

さて、両者の変数 p と q の微分の係数を比較すると、重要な関係式、

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

が得られます。さらにラグランジュの方程式より、

$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{dp}{dt}$ ですから、一つ目の式は、$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp}{dt}$ となり、対称性が非常に良い、二つの式

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt}$$

が得られます。これを正準方程式(*canonical equation*)と言い、オイラーラグランジュの方程式と等価です。なお、*canonical* は「ものさし」とか標準的なという意味ですが、統計物理の正準分布と直接は関係ないです。ここで注意ですが、二つ目の式には、堂々と $\frac{dq}{dt}$ が入っていますが、これは独立変数としての $\dot{q}$ ではなく、q の時間微分です。変数はあくまで q の方です。

それからもちろん、$H(q_1, q_2, \cdots, p_1, p_2, \cdots)$ のように変数がたくさんあるときは、

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) dq_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) dp_i \quad \text{及び、}$$

$$dH = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2 \cdots, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \cdots)\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) dq_i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) d\dot{q}_i$$

$$=\sum_i -\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)dq_i + \dot{q}_i dp_i$$ となって、それぞれの微分の係数を比較すると、

$\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\dfrac{dp_i}{dt}$ と、$\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dfrac{dq_i}{dt}$ が求める式になります。

ハミルトニアンの意味を明らかにするために、H を時間微分してみますと、

$\dfrac{dH}{dt}=\left(\dfrac{\partial H}{\partial q}\right)\dfrac{dq}{dt}+\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)\dfrac{dp}{dt}=-\dot{p}\dot{q}+\dot{q}\dot{p}=0$ となり、確かにゼロになり、保存量であることがわかります。ただしこれはもちろん、H があらわに時間を含んでいない場合の話です。

ラグランジアンの所(第二回)で時間の一様性から、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}-L$ がエネルギーという保存量になることをやりました。ハミルトニアンの中身はこの表式と全く同じですから、確かにエネルギーであることがわかります。しかし、ハミルトニアンを書く場合には、あくまで変数を p と q にしておかねばなりません。正準方程式で偏微分するときに違ってくるからです。

それでは、具体例を示して慣れることにしましょう。

1) 自由な質点では、$L=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ ですから、

$H=p\dot{x}-L=m\dot{x}^2-\dfrac{m\dot{x}^2}{2}=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ ですが、H は p を変数にするのですから、定義 $H(p,q)=p\dot{q}-L(q,\dot{q})$、$p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ に忠実に従ってとすると、$p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ ですから、

$H=m\dot{x}\dot{x}-\dfrac{m\dot{x}^2}{2}=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}=\dfrac{p^2}{2m}$ となります。

正準方程式は、 $\dot{q} = H_p = p/m$ **と** $\dot{p} = -H_q = 0$ **です。**

これは運動量の定義と、ニュートンの運動方程式そのものです。

2) **調和振動子では、** $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{mw_0^2 x^2}{2}$ **ですから、**

$H = p\dot{x} - L = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{mw_0^2 x^2}{2}$ **となり、正準方程式は、**

$\dot{q} = p/m$ **と、** $\dot{p} = -H_x = -mw_0^2 x$ **となります。**

3) **少し自明でない例は、**3 **次元の中心力です。** $L = \dfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(r)$ **ですから、**

$H = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^{3} m\dot{x}_i\dot{x}_i - L = \dfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + V(r)$ **となります。球面座標では、**

$x = r\sin q\,\cos\varphi$ 、 $\dot{x} = \dot{r}\sin q\,\cos\varphi + r\dot{q}\,\cos q\,\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin q\,\sin\varphi$ **及び** $y, \dot{y}, z, \dot{z}$ **から、**

$L = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{q}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2 q\right) - V(r)$ **ですから、**

変数 r **に対する運動量は、** $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

変数 q **に対する運動量は、** $p_q = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = mr^2\dot{q}$

変数 φ **に対する運動量は、** $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2 q$

となります。よって、ハミルトニアンは、

$$H = p_r\dot{r} + p_q\dot{q} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_q^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2 q}\right) + V(r)$$

正準方程式は、

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_q^2 + p_\varphi^2/\sin^2 q}{mr^3} - V'(r)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_q} = \frac{p_q}{mr^2}, \qquad \dot{p}_q = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p_\varphi^2\cos q}{r^2\sin^3 q}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 q}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

となり、最後の式には、角運動量の保存則が出てきます。

このように、ハミルトニアンに「ある座標」が含まれていないと、「ある座標」に対応した一般化運動量が保存します(ラグランジアンでもまったく同様です。2回目の講義でやりました)。この、含まれていない座標のことを「循環座標」と云います。H は循環座標をずらしても不変というところから何かが保存しそうだということは直観にも一致します。できるだけ循環座標が多くなるように座標系を選んだり変数変換するのが問題を解く道筋です。

図式としては、系の対称性 ⇒ 循環座標 ⇒ 保存量 ということです。

例 4 ハミルトニアンからラグランジアンへの逆変換

H の定義から明らかで、$L = \sum p_i \dot{q}_i - H$ ですが、もちろん、ラグランジュ方程式を使うのであれば、$L = L(q, \dot{q})$ と、速度の関数にしておく必要があります。この場合、最初に与えられたのがハミルトニアン $H = H(q, p)$ だったのですから、速度 $\dot{q}$ が何であるかわからないはずです。よって、正準方程式から、$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ を求めてやって変換することになります。

例 5　摩擦

(外力は仮想的なポテンシャル$U_f(x,t) = -xf(t)$をLに加えればよいので)

振動のところでやったように、オイラーラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}}\right) + f_{摩擦} = 0$$

でした。ここで$f_{摩擦} = -a\dot{x}$とすれば摩擦を導入できたことになったのですが、そ

れでは摩擦はLに組み込めないのでしょうか。試しに、

$$L = g(t)L_0 = g(t)\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right)$$

とおいて代入してみると、$-g(t)U'(x) - (g'(t)m\dot{x} + g(t)m\ddot{x}) = 0$

$$\therefore -U'(x) - m\ddot{x} - \frac{g'(t)}{g(t)}m\dot{x} = 0$$

ですが前半部分は$m\ddot{x} = -\dfrac{dU}{dx}$　という摩擦が無い場合の運動方程式ですから、

$\dfrac{-g'(t)}{g(t)}m\dot{x}$を$f_{摩擦} = -a\dot{x}$に一致させればよいことがわかります。よって、

$\dfrac{g'}{g}m = a$となりますから、$g' = \dfrac{a}{m}g$の解はあきらかに$g = Ce^{at/m}$です。

以上より、$L = e^{at/m}\left(\dfrac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right)$が得られます。

これをハミルトニアンに変換してみましょう。

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = e^{at/m}\left(m\dot{x}\cdot\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + U\right) = e^{at/m}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U\right)$$

ですが、ハミルトニアンはエネルギーであることを思い出すと、摩擦があるの

にどんどん増えて行ってしまいそうです。なぜでしょうか。実は、ここまでで

は不完全で、運動量に直さなければなりません。

ここが肝心で、$p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=e^{at/m}m\dot{x}$ が運動量なのです。これは自明でないですね。

これを代入すれば、$H=e^{at/m}\left(\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{e^{-at/m}p}{m}\right)^2+U\right)=e^{-at/m}\dfrac{p^2}{2m}+e^{at/m}U(x)$

正準方程式は、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=e^{-at/m}\dfrac{p}{m}$、及び、$\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}=-e^{at/m}U'(x)$

ですが、後者は、運動量の定義から、$\dfrac{dp}{dt}=e^{at/m}(a\dot{x}+m\ddot{x})$ですから、確かに摩擦

がある場合のニュートンの運動方程式に一致します。

おまけ：座標変換によるラグランジュ方程式の不変性

それでは座標変換をした場合にラグランジュ方程式は確かに不変になることを

数学的に証明しておきましょう。$L=L(q_1\cdots q_n,\dot{q}_1\cdots\dot{q}_n)$ というラグランジアンと

ラグランジュ方程式$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$ に対し、

$\begin{cases} Q_1=Q_1(q_1\cdots q_n) \\ \quad\vdots \\ Q_n=Q_n(q_1\cdots q_n) \end{cases}$ という座標変換を行っても、運動方程式は全く同じ形で、

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial Q_i}=0$ となる、ということを示すわけです。

この証明は少し注意が必要で、微分変数の変換は、

まず、$\dfrac{\partial}{\partial Q_i}=\dfrac{\partial q_j}{\partial Q_i}\dfrac{\partial}{\partial q_j}$ は明らかです。しかし、$\dot{Q}_i=\sum_j\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$ の右辺には、Q_i に含

まれる q_i と、そのままの $\dot{q}_i$ が存在することから、$\dot{Q}_i=\dot{Q}_i(q_1\sim q_N,\dot{q}_1\sim\dot{q}_N)$ となっ

ていることに注意して、

$$\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i}=\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial}{\partial q_j}+\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$$

となるので、これらをラグランジュ方程式に代入すれば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

となります。時間微分を実行すれば、

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

おまけ：例 6 正準方程式の数値積分

余談になりますが、正準方程式は 1 階の微分方程式ですから、ニュートンやラグランジュの運動方程式に比べて数値計算もしやすそうです。実際、微小時間経過後の変数の値を見てみると、

$$q(t+dt)=q(t)+\dot{q}(t)dt=q(t)+H_p(q(t),p(t))dt=q(t)+\frac{p}{m}dt$$

$$p(t+dt)=p(t)+\dot{p}(t)dt=p(t)-H_q(q(t),p(t))dt=p(t)-mw^2qdt$$

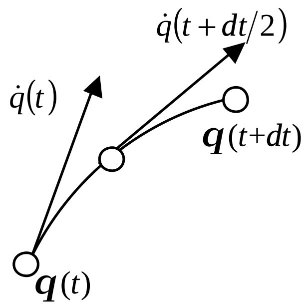
となります。一見よさそうですが、

$H(t+dt)=\dfrac{p^2(t+dt)}{2m}+\dfrac{1}{2}mw^2q^2(t+dt)$を計算してみると、

$$=H(t)+\frac{1}{2m}\left(mw^2q^2dt\right)^2+\frac{1}{2}mw^2\left(\frac{p}{m}dt\right)^2=H(t)+w^2dt^2H(t)=\left(1+(wdt)^2\right)H(t)$$

で、どんどんエネルギーが増えて行ってしまいます。dt を小さくすれば、確かにずれは小さくなりますが、二乗ですから、「確実」に増えていくことは避けられません。そこで、

$$q(t+dt)=q(t)+\dot{q}(t+dt/2)dt=q(t)+\frac{1}{2}(\dot{q}(t)+\dot{q}(t+dt))dt$$



と、微分の補間位置を少しずらしてやります(ファインマン)。すると、

$$q(t+dt)=q(t)+\frac{1}{2}\{H_p(q(t),p(t))+H_p(q(t+dt),p(t+dt))\}dt$$

となり、これから求めようとする未来の値まで入って来てしまいますから、

$H_p(q(t+dt),p(t+dt))$ の方は悪い近似で我慢して貰うと、

$\approx H_p(q(t)+\dot{q}(t)dt,\ p(t)+\dot{p}(t)dt)$ と、現在の値だけで表せます。

これを使うと dt^2 の精度で、ハミルトニアンは一定になってくれます。

すなわち、

$$q(t+dt)=q(t)+\frac{1}{2}\left(H_p(q,p)+H_p(q,p)+H_{pq}(q,p)\dot{q}dt+H_{pp}(q,p)\dot{p}dt\right)dt$$

$$=q(t)+H_pdt+\frac{1}{2}H_{pq}(q,p)H_p(q,p)dt^2-\frac{1}{2}H_{pp}(q,p)H_qdt^2$$

$$\therefore q(t+dt)^2\approx q(t)^2+2q(t)H_pdt+\left(H_p^2+H_{pq}H_pq-H_{pp}H_qq\right)dt^2$$

$$=q^2+2q\frac{p}{m}dt+\left(\frac{p^2}{m^2}+0-\frac{1}{m}mw^2q^2\right)dt^2=q^2+\frac{2qp}{m}dt+\left(\frac{p^2}{m^2}-w^2q^2\right)dt^2$$

一方、

$$p(t+dt) = p(t) + \frac{1}{2}(\dot{p}(t) + \dot{p}(t+dt))dt = p(t) - \frac{1}{2}\left(H_q(q,p) + H_q(q+\dot{q}dt, p+\dot{p}dt)\right)dt$$

$$= p(t) - H_q dt - \frac{1}{2}H_{qq}\dot{q}dt^2 - \frac{1}{2}H_{qp}\dot{p}dt^2$$

$$\therefore\ p(t+dt)^2 \approx p(t)^2 - 2pH_q dt + \left(H_q^2 - H_{qq}H_p p + H_{qp}H_q p\right)dt^2$$

$$= p^2 - 2pmw^2 qdt + \left(m^2 w^4 q^2 - mw^2 \frac{p}{m} p + 0\right)dt^2$$

$$= p^2 - 2mw^2 pqdt + \left(m^2 w^4 q^2 - w^2 p^2\right)dt^2$$

$$H(t+dt) = \frac{p(t+dt)^2}{2m} + \frac{mw^2 q(t+dt)^2}{2}$$

$$= \frac{p^2}{2m} - w^2 pqdt + \frac{w^2}{2}\left(mw^2 q^2 - \frac{p^2}{m}\right)dt^2 + \frac{mw^2 q^2}{2} + w^2 qpdt + \frac{w^2}{2}\left(\frac{p^2}{m} - mw^2 q^2\right)$$

$$= H(t) + 0 \cdot dt + 0 \cdot dt^2$$