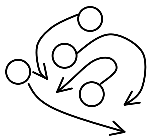
注意これは講義ノートではありません。計算の要点を抜粋しただけのものです。

３-A フェルミ統計・ボース統計・古典統計



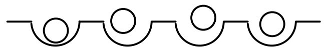
・粒子同士がお互いに触れ合う場合（金属の自由電子、液体 He、中性子星等）

Fermi 粒子(半整数スピン) $\langle n_\varepsilon \rangle \equiv f_{\mathrm{F}}(\varepsilon) = 1/\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\right)$, $f_{\mathrm{F}} = 0 \sim \infty$

Bose 粒子(整数スピン) $\langle n_\varepsilon \rangle \equiv f_{\mathrm{B}}(\varepsilon) = 1/\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1\right)$, $f_{\mathrm{B}} = 0 \sim \infty$

・粒子同士が触れ合わない場合（固定されている、または高温で粒子密度が小さい）

古典統計： $\langle n_\varepsilon \rangle \equiv e^{-\beta\varepsilon}$, $F = -k_{\mathrm{B}} \log Z$



３-B 化学ポテンシャル 〜 いごこちの悪さ(μが大きいとみんな出て行く)

・Fermi 粒子：パウリの排他律のため、粒子は同じ状態(運動量、スピン)を取れない

⇒ 粒子を寄せ集めるとμはぐんぐん上がって行く

・Bose 粒子：f_{B}は平均粒子数なので $f_{\mathrm{B}} \geq 0 \Rightarrow e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \geq 1$, $\therefore 0 \geq \mu$ （$\varepsilon_{基底状態} = 0$ とした）

⇒ 粒子はいつでも集まりやすい (※低温で Bose-Einstein 凝縮—'03 院試)

・高温の場合：粒子密度が小さくなるので、お互いに触れ合わない

⇒ 古典統計に一致(古典極限), $f_{\mathrm{F}} \approx f_{\mathrm{B}} \approx e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$, μ=負になる

３-B-１ 化学ポテンシャルと粒子数

全粒子数 $N = \sum_j \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j-\mu)}-1} = \dfrac{1}{e^{\beta(0-\mu)}-1} + \dfrac{1}{e^{\beta(e_1-\mu)}-1} + \dfrac{1}{e^{\beta(\varepsilon_2-\mu)}-1} + \cdots$

・Bose 粒子：低温で $\mu \to 0$ に近づき、初項以外の項はすべてゼロ(Bose-Einstein 凝縮)

・Fermi 粒子：低温で$\varepsilon_n < \mu$までの項は= 1, $\varepsilon_n > \mu$ の項は= 0 ($\mu(T=0)$=Fermi energy)

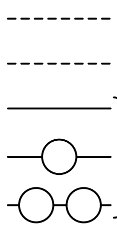
◎和の取り方の注意（次回、「状態密度」のところで詳しく説明する）

・スピン：同じε_jに対して状態は 2S+1 個 ⇒ それぞれ和を取る

・運動量の方向：同じε_jでも方向が異なる状態 ⇒ それぞれ和を取る

３-C　同種粒子のエネルギー準位の占有

三粒子と三エネルギー準位 (低温では低Eの準位のみを考えればよい)
におけるいろいろな占有数に対する場合の数



占有数 \ 粒子の種類										総数
	1	0	1	2	2	1	0	3	0	0	
	1	1	0	1	0	2	2	0	3	0	
	1	2	2	0	1	0	1	0	0	3	
古典識別可	3! =6	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_2$ =3	$_3C_0$ =1	$_3C_0$ =1	$_3C_0$ =1	27
古典識別不能	6/3! =1	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	3/3! =1/2	1/3! =1/6	1/3! =1/6	1/3! =1/6	9/2
Boson	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
Fermion	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

場合の数を考えると Boson は古典粒子に比べて下の状態に集まりやすい ('02 院試)。