非慣性系 ― カーブを曲がる車に乗って感じること

1. 慣性系と非慣性系

慣性系(慣性座標とも言う)＝等速直線運動している座標
非慣性系(非慣性座標とも言う)＝そうでない座標(加速する車など)
非慣性系に乗っている人は「慣性力＝$-\vec{a}$」を受ける: ダランベールの原理

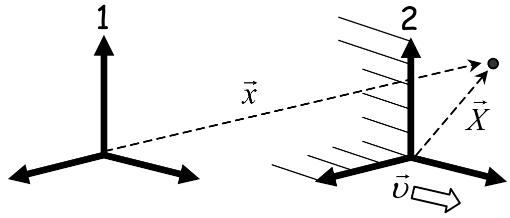
inertia force(慣性力)とか、fictitious force(偽の力)と言う。

2. ガリレイの相対性原理

「すべての慣性系では同じ運動方程式が成り立つ」

右図で慣性系1と慣性系2での座標の関係は、

$$\underbrace{\vec{x}}_{\text{慣性系1から見た座標}} = \underbrace{\vec{X}}_{\text{慣性系2から見た座標}} + \underbrace{\vec{\upsilon}t}_{\text{慣性系2の1に対する相対速度}}$$



$\vec{\upsilon}$ が時間によらず一定なら、どちらも慣性系(乗っている人は、外を見ない限り、自分の座標系が動いているのかどうかわからない)

となっているはず。すると、慣性系 1 で

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{x}}$$

が成り立っていれば、座標の関係式を代入すると、

$$\vec{f} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{X}+\vec{\upsilon}t\right) = m\ddot{\vec{X}}$$

となって同じ運動方程式になる。同じ運動方程式＝同じ運動。
∵慣性力が働かないのであるから、当たり前といえば当たり前の話。

【余談】υ が大きくなると同じ運動方程式にならなくなる、というのがアインシュタインの相対性理論。

3. ダランベールの原理

今度は座標系 2 の相対速度 $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ が一定でない場合(非慣性系)を考える。

$\therefore \vec{x} = \vec{X} + \vec{h}$ 　但し、$\vec{h}(t) = \int_0^t dt\,\vec{\upsilon}(t)$

座標系1(慣性系)で成り立っている運動方程式を、

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{x}}$$

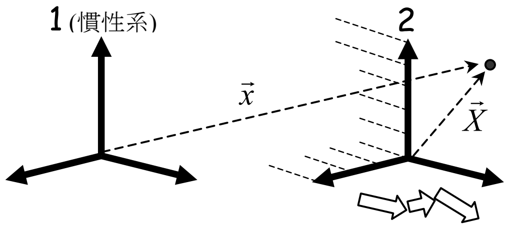
とすると、さっきと同様に座標変換の式を代入して、

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{X}} + m\ddot{\vec{h}}$$

となる。ここで、$\vec{f}_i = -m\ddot{\vec{h}}$ と置くと、

$$\vec{f} + \vec{f}_i = m\ddot{\vec{X}}$$

が成り立つ。



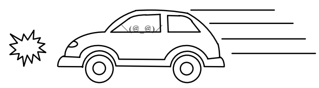
相対速度 $\vec{\upsilon}$ は時々刻々と変化

これは座標系2では、$\vec{f} + \vec{f}_i$ の力が働いているように見える、ということだ。

まとめ―加速度運動する座標系に乗ると余計な力(慣性力)を感じる

4. 慣性力の具体例

4-1. 急停止する車

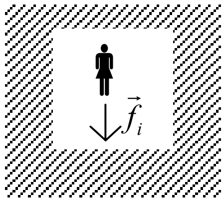


時速 36km/s で走行中の車が等加速度で減速して 10 秒で停止したとする。
このときの慣性力を求めると、$\upsilon_0 = 10$ m/s なので、$a = \ -1$ m/s^2 であり、
体重が 60kg （願望可）の人は、$\vec{f} = -ma = 60\ \mathrm{N} = 60/9.8 \approx 6.1\ \ \mathrm{kgf}$ という力を受ける。
もし 1 秒で停止させると、十倍の 61kgf となり、全体重と同じ力で後ろから押される。

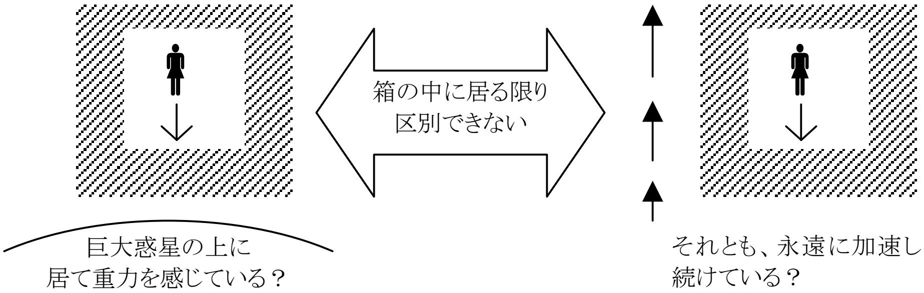
4-2. 回転

半径 10m のカーブを法定速度の時速 36km（＝10m/s）で曲がりきろうとするとどうなるだろうか。
$m\,a = m\upsilon^2/r = 60\mathrm{kg}\cdot(10\,\mathrm{m/s})^2/10m = 600\mathrm{N} = 600/9.8 \approx 61\,\mathrm{kgf}$
となり、全体重と同じ力で外側に押し付けられる。

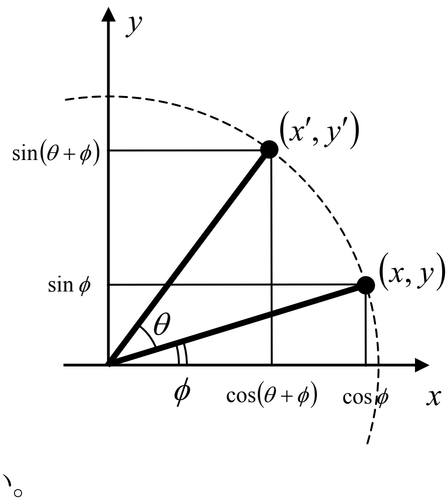
5. 慣性力と外力



自分が外の見えない箱の中に居て、慣性力を感じているとしよう。
その力が慣性力なのか、重力なのか区別できるだろうか。
実は区別できないのだ。



6. 回転座標系



今度は回転している座標系を考えよう。
ベクトル(x, y)を原点のまわりにθだけ回転したとする。
$x = \cos\phi,\ \ y = \sin\phi$ であるから、

$$x' = \cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = \sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta$$

となる。これを行列を用いて書くと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。
三次元座標を z 軸のまわりにθだけ回転したとすると、
$z' = z$ であるから、　　　【注】x', y' には一切、z は含まれない。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

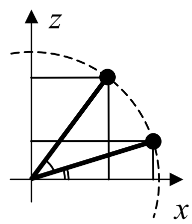
と書ける。この行列を、$R_z(\theta)$と書こう。

〔計算チェック〕
$\theta = 0$ では「回転しない」のであるから、$R_z(0) = I$ となるはずだが、

実際、$R_z(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & 0 \\ \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$である。

問）$\theta = \pi$ や$\dfrac{\pi}{2}$ ではR_z はどうなるだろうか？　それは何をする行列だろうか？

7. y, x 軸の廻りの回転



z 軸周りの回転とは、
変数名が変っただけで
あとは全く同じ

同様に、y 軸の周りの回転はどうなるだろうか？

右図を見ると z 軸の周りの回転と全く同じで、$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$

であるから、三次元の場合は、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_y(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

となる。

x 軸の周りの回転はもはや自明で、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_x(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

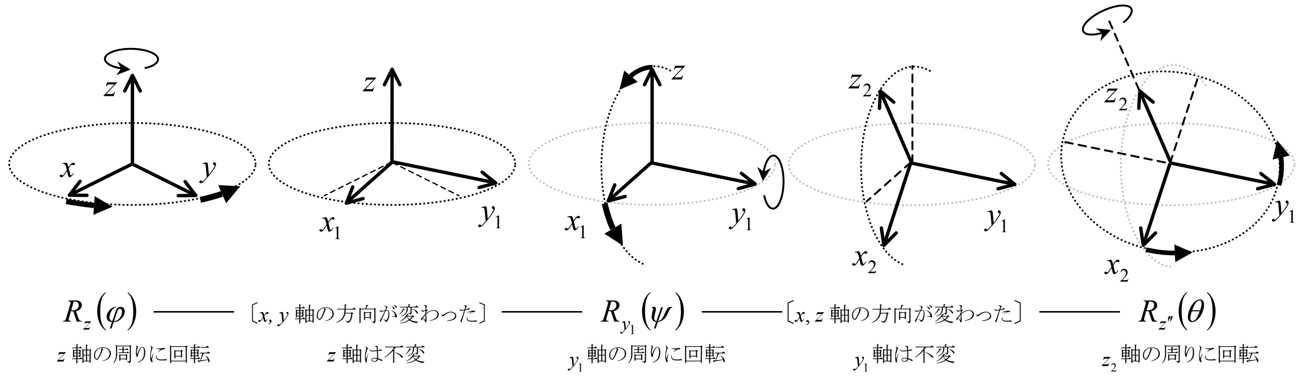
8.【附録】任意の軸の廻りの回転―Euler 角（Eularian angle）

準備―　回転を二回行ったらどうなるか。それぞれの行列の積で良い。

例）z 軸の周りにα だけ廻したあと、β 廻す。これはもちろん、$\alpha + \beta$ だけ廻すのと同じだ。
実際、$R_z(\alpha) R_z(\beta) = R_z(\alpha + \beta)$である。

よって、任意の軸の周りの回転も、さっきやった、x, y, z 軸の周りの回転の組み合わせで表すことが出来れば、行列の積で簡単に表せるはずだ。
（ここで「簡単」といったのは、行列の積の計算なので、深く考えなくともロボットのように実行できるという意味で、計算そのものはもちろん面倒くさい）。

実際、以下のように三回廻せば任意の軸の周りで回転できる。



最後に移動した先の座標軸を(x', y', z')とする。$z' = z_2$ である。
$\vec{x} = R_{z_2}(\psi)\underbrace{R_{y_1}(\theta)\underbrace{R_z(\varphi)\vec{x}}_{\vec{x}_1}}_{\vec{x}_2}$ と書けるので、

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

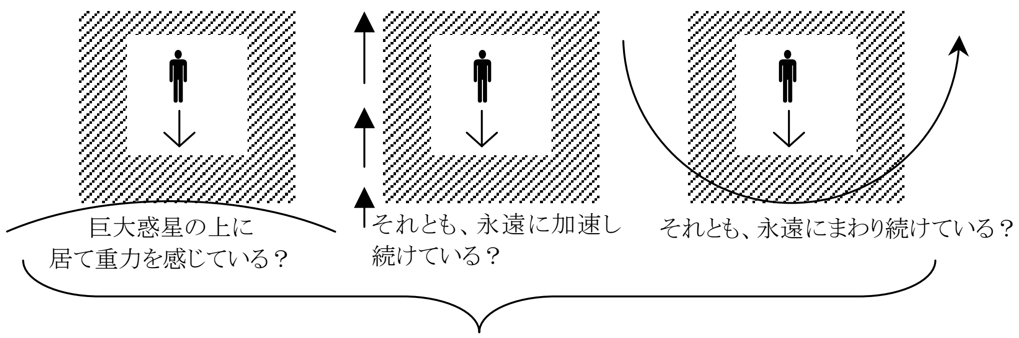
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

オイラー角を使うと、複雑なコマの動きや、ロボット工学でのアーム制御のやり方などを、
詳しく調べることができる。

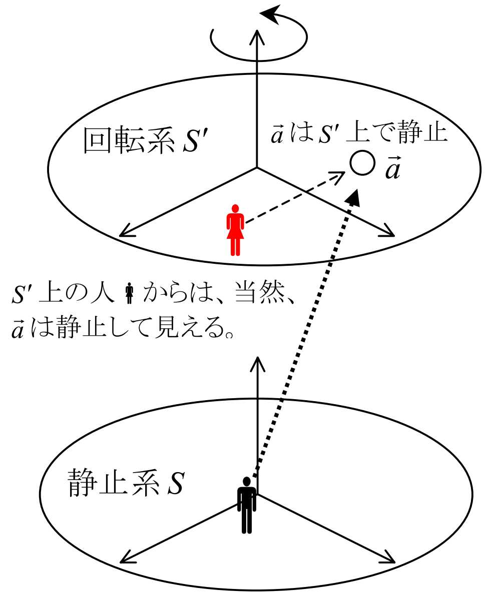
回転座標系

回転座標系（＝カーブを曲がる車）に乗ったと考えると、外向きに「遠心力」を受けそうな気がする。ダランベールの原理からしても、加速度（内向き）と反対側に「うその力」（＝慣性力）を受けるというのだからそれで良いような気がする。果たしてそれだけで本当に良いのだろうか？ ダメだからこんなこと言うのだが、、、。



外が見えない人はどうなっている区別がつくだろうか

【問題】
20XX 年、RAL 星に向かっていた宇宙船ジートー号は、原因不明のトラブルで操作不能となった。
全てのエンジン・計器類は故障し、全ての窓はシールドが降りてしまい、外が全く見えなくなった。
宇宙船に閉じ込められた我々がわかるのは、わずかな重力を感じることだけだ。現在の状況を推理せよ。



静止系 S 上の人からは、$\vec{a}$ は廻って見える

この問題を解くために、右図のように、
角速度 ω で z 軸の周りに回転している座標系 S'（上）と、
静止している座標系 S（下）を考える。

回転系 S' の上に点 $\vec{a}$ があり、
回転系上では静止しているとする（上図）。
回転系に乗っている人からは、当然静止して見える。

一方、静止系 S に乗っている人から S' を見る（上図）と、
点 $\vec{a}$ は角速度 ω で動いているように見える。
9. 静止系 S から回転系 S' を眺める
点 $\vec{a}$ の位置ベクトルがどういうふうに動いて見えるかを調べよう。

要するに z 軸の周りに円運動しているだけなので単純な話。

まず角速度を $\vec{\omega}=(0,0,\omega)$ とする。
時刻 t から $t+\delta t$ まで経過した時の $\vec{a}$ のずれを調べよう。
右図より、$\vec{a}$ は、破線の円周上を動くので、

大きさ＝$|\vec{a}|\sin\theta\cdot\omega\delta t$
方向　＝$\vec{\omega}$ と $\vec{a}$ の両方に垂直

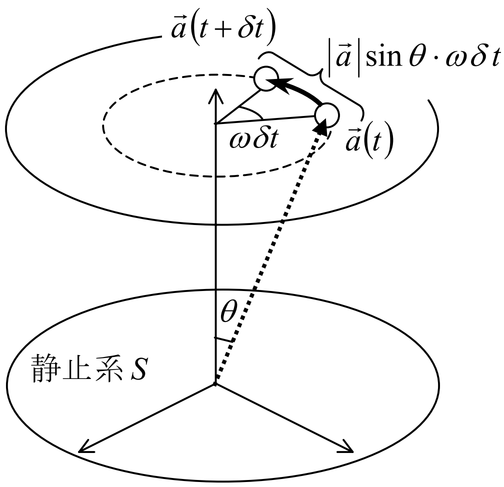
となり、これは外積を使って、

$$a(t+\delta t)-a(t)=(\vec{\omega}\delta t)\times\vec{a}$$

と書ける。両辺を δt で割ってやれば、

$$\underbrace{v_{\vec{a}}(t)}_{\vec{a}\text{の動く速さ}}=\vec{\omega}\times\vec{a}$$

という式を得る。



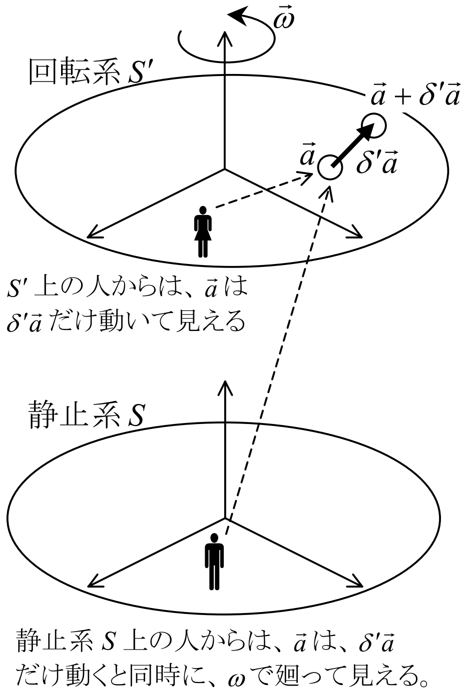
地球を北極の上から見た図。
◎は台風（中心が低気圧）で、その中に吹き込む風が、
コリオリの力を受け、反時計周りに渦を作る。

10. 回転系で $\vec{a}$ が動く場合
前の話は、いわば、メリーゴーランドで馬が上下に動かず、ただ廻っているだけの話だった。今度は、馬も上下に動く場合を考えよう。これを静止系からどう見えるだろうか。

静止系からみた馬の動き
　　＝　回転した分　＋　上下に動く分

という重ね合わせになっているに違いない。これをまた、ベクトルで調べよう。

・回転系で見た$\vec{a}$のずれを$\delta'\vec{a}$
・静止系で見た$\vec{a}$のずれを$\delta\vec{a}$



とすると、

$$\delta\vec{a}=\delta'\vec{a}+\underbrace{(\vec{\omega}\delta t)\times\vec{a}}_{\text{廻った分}}=\delta'\vec{a}+(\vec{\omega}\times\vec{a})\delta t$$

であるので、δt で割ってやると、

$$\frac{\delta\vec{a}}{\delta t}=\frac{\delta'\vec{a}}{\delta t}+(\vec{\omega}\times\vec{a})$$

という結果が得られる。

$\vec{a}$は任意のベクトルなので、例えば、$\vec{x}$を代入してやると、

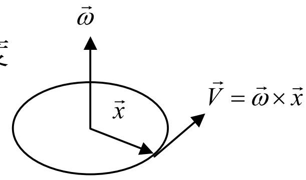
$$\frac{\delta\vec{x}}{\delta t}=\frac{\delta'\vec{x}}{\delta t}+(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

となる(単に a を x と書き換えただけ…)。
ここで、$\delta t\to 0$としてやれば、当然、$\dfrac{\delta'\vec{x}}{\delta t}$や$\dfrac{\delta\vec{x}}{\delta t}$ は速度になる。
よって、

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{d'\vec{x}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{x}$$

となるが、これは単に、

静止系から見た速度 ＝ 回転系から見た速度 ＋ 回転による速度



という「速度の足し算」をしているに過ぎない。
つまり$\boxed{\text{当たり前の話だ}}$。

11. 加速度

上の項で、微分記号に prime が付いて d' となっているがこんなことで驚いてはいけない。
これは、見る場所によって、「微分」の結果が異なることを意味しているだけだ。
(すぐ前でやったように、メリーゴーランドの回転台に乗って見るか、外から見るかで
「速度」が違う、と思えば当たり前のことだ)

これをふまえて、今度は、加速度を計算してみよう。
静止系で見たときと、回転系で見たときとで加速度が違うかどうかを調べるのだ。
※どうして加速度の違いを調べたいかというと、今日の最初でやったように、慣性力の違いがわかるからだ。

二階微分すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d'\vec{x}}{dt}\right)+\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

右辺第一項の微分の順番を入れ替えて、

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d'}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)+\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

となる（ωは静止系で見て一定とする）。

右辺の$\frac{d\vec{x}}{dt}$に、$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{d'\vec{x}}{dt}+(\vec{\omega}\times\vec{x})$を代入すると、〔ここが肝〕

$$右辺 =\frac{d'}{dt}\left(\frac{d'\vec{x}}{dt}+(\vec{\omega}\times\vec{x})\right)+\vec{\omega}\times\left(\frac{d'\vec{x}}{dt}+(\vec{\omega}\times\vec{x})\right)$$

$$=\frac{d'^2\vec{x}}{dt^2}+\frac{d'}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{x})+\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{x}}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

二項目の外積$\vec{\omega}\times\vec{x}$を微分して、

$$=\frac{d'^2\vec{x}}{dt^2}+\frac{d'\vec{\omega}}{dt}\times\vec{x}+\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{x}}{dt}+\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{x}}{dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

となる。

【注意】静止系ではωは一定であるが、回転系ではどうか、確かめる必要がある。
$\frac{\delta\vec{a}}{\delta t}=\frac{\delta'\vec{a}}{\delta t}+(\vec{\omega}\times\vec{a})$の$\vec{a}$に$\vec{\omega}$を代入すると、$\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t}=\frac{\delta'\vec{\omega}}{\delta t}+\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{\omega})}_{0}=\frac{\delta'\vec{\omega}}{\delta t}$
なので結局簡単になって、静止系で一定なら、回転系でも一定になることがわかる。

よって、

$$=\frac{d'^2\vec{x}}{dt^2} + 2\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{x}}{dt} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x})$$

という結果を得る。

12. コリオリの力と遠心力

つまり、回転系に乗っていると、
静止系に乗っているときに見た加速度$\ddot{\vec{x}}$とは、$2\dot{\vec{x}}\times\vec{\omega}+(\vec{\omega}\cdot\vec{x})\vec{\omega}$だけずれていることになる。

静止系（慣性系でも同じ）での運動方程式を $m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{f}$ とすると、

回転系では加速度が$\frac{d\vec{x}^2}{dt^2}$, $\frac{d'\vec{x}^2}{d't^2}$と違って見えるのだから、

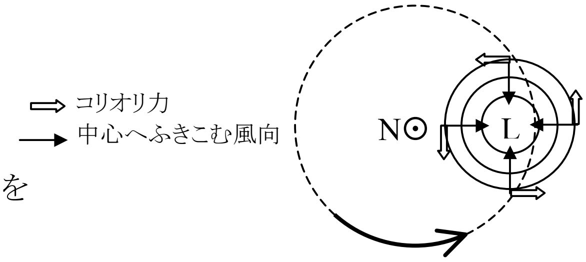
$$m\frac{d'^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{f}\underbrace{-2m\vec{\omega}\times\frac{d'\vec{x}}{dt}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{x})}_{慣性力}$$

となる。右辺の第二項、第三項は「見かけの力＝慣性力」と見なすことが出来る。

・$-m(\vec{\omega}\cdot\vec{x})\vec{\omega}$ は、いわゆる遠心力 centrifugal force
・$-2m\dot{\vec{x}}\times\vec{\omega}$ は、コリオリの力 Coriolis' force ガスパール＝ギュスターヴ・コリオリ(1792-1843)

13. コリオリの力が現れるとき
回転系に乗りながら、動くと「おかしな力＝コリオリ力」を感じる。
方向は速度と回転軸の両方に垂直
（静止していれば遠心力のみ）

例）台風の目に吹き込む渦の向き（CCW）

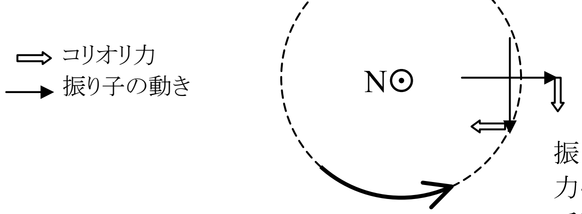


・なお、台風の位置自身も、コリオリ力の影響を受け、右（東向き）に曲がる。

・偏西風（西寄りの風）も、もともと、赤道付近から、北極に向けて吹いていた風が、コリオリ力で、右（東向き）に曲げられたもの。

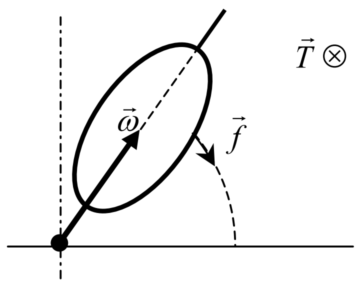
地球を北極の上から見た図。
◎は台風（中心が低気圧）で、その中に吹
コリオリの力を受け、反時計周りに渦を作る

例）フーコーの振り子



振り子のゆれる面「→」が、コリオリ力を受けて、時計回り CW に回転して行く

例）コマの歳差運動も、コマが倒れようとすると、コリオリの力が働く



※問題
§9 で記したジートー号が今どんな状況にあるかを知るにはどうすれば良いだろうか。