極座標

1. 二次元のデカルト座標(x, y)を極座標で表しなさい（公式をそのまま書くだけです）。
2. ラジアンで表したθを度に直しなさい。
   $\theta = 0, \pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $4\pi/3$, $5\pi/3$, $5\pi/4$, $7\pi/4$
3. 以下の点（デカルト座標で表してあります）を極座標(r, θ)で表しなさい。
   $(x, y) = (1,1)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$
4. 以下の点（極座標で表してあります）をデカルト座標(x, y)で表しなさい
   $(r, \theta) = (0,0)$, $(0,\pi)$, $(1,0)$, $(2,2\pi)$, $(3,\pi/2)$, $(3,\pi/3)$
5. 以下の点（極座標で表してあります）をデカルト座標(x, y)で表しなさい
   $(r, \theta) = (2,\pi/3)$, $(2,\pi/4)$, $(2,2\pi/3)$, $(3,-\pi/3)$, $(2,4\pi/3)$, $(2,9\pi/4)$
6. 原点に中心を持つ半径1の円周上の点を$\cos\theta, \sin\theta$を用いてベクトルの成分表示で表しなさい。また、θの値はいくつからいくつまでとすれば、円周全体が表されますか？
7. 同様に、半径 1.5 の円周上の点を表しなさい。
8. 同様に、$(1,0)$に中心がある、半径 2 の円周上の点を表しなさい。
9. $r = \theta$としたときに、$\theta = 0 \sim 4\pi$まで変化させたときの(r, θ)はどんな図形になりますか？
   （これを「軌跡」といいます）。
10. $r = 2 + \cos\theta$としたときに、$\theta = 0 \sim 2\pi$まで変化させたときの(r, θ)の軌跡を描きなさい。
11. 原点に中心を持つ半径1の円周上の点$(\cos\theta, \sin\theta)$と、θが$\theta + d\theta$にずれたときの点との距離$d\ell$を、ピタゴラスの定理と、三角関数の加法定理を用いて求めなさい。但し、$d\theta$はとても小さいとして、$\sin d\theta \approx d\theta$及び、$\cos d\theta \approx 1$としなさい。
12. 前問の距離$d\ell$を$\theta = 0 \sim 2\pi$まで積分するとどんな値になりますか？
13. 同様に、座標$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$と、$\theta$が$\theta + d\theta$にずれ、$r$が$r + dr$にずれた点との距離を求めなさい。但し、$d\theta$も$dr$もとても小さいとして展開し、一次の項まで残しなさい。
14. $\theta = \omega t$（ωは定数），$r =$定数、と表されるときの速度$\dot{x}$と加速度$\ddot{x}$を求めなさい。ヒント―まず、デカルト座標x, yをr, θで表しなさい。そして、x, yをtで微分しなさい。
15. 同様に$\theta = \omega t$, $r = \cos\theta$と表されるときの速度$\dot{x}$と加速度$\ddot{x}$を求めなさい。
16. 三次元のデカルト座標(x, y, z)を極座標で表しなさい（公式をそのまま書くだけです）。
17. 以下の点（デカルト座標で表してあります）を極座標(r, θ, ϕ)で表しなさい。
    $(x, y, z) = (0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,-1)$, $(1,1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $(0,1,1)$
18. $(x, y, z) = (1,1,1)$を極座標(r, θ, ϕ)で表しなさい。ヒント―$(1,1,1) = (1,1,0) + (0,0,1)$であることを思い出して、ピタゴラスの定理を使いなさい。
19. 右下図の微小体積要素を極座標を用いて表しなさい（講義で導いた公式を、もう一度自分で絵を書いて求めなさい）。
20. 右下図の微小面積要素（球表面の微小面積）dsを極座標を用いて表しなさい。この面積dsを球表面全体（$r =$一定、$\theta = 0 \sim \pi$, $\phi = 0 \sim 2\pi$）で積分するとどんな値になりますか？
21. 三次元極座標で体積積分・面積積分する場合に、θの範囲が$0 \sim 2\pi$でなく、$0 \sim \pi$になる理由を 50 字以内でまとめなさい。
22. yz 平面上の原点中心とした半径 2 の円の点をr, θ, ϕで表しなさい。
23. 法線$(1,1,0)$の面上の原点を中心とした半径 2 の円の点をr, θ, ϕで表しなさい。
24. $r =$一定、$\theta = 0.01 \cdot \phi$、$\phi = \omega t$（ωは定数、$t = 0 \sim 100\pi/\omega$）で表される点が描く軌跡を調べなさい。
25. 密度が$\rho = \alpha/r$で与えられる半径Rの球の質量を求めなさい。（但しαは定数） ヒント― $\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \rho \sin\theta \, d\theta$
    そして、密度∞の点があっても有限な質量になることを不思議がりなさい