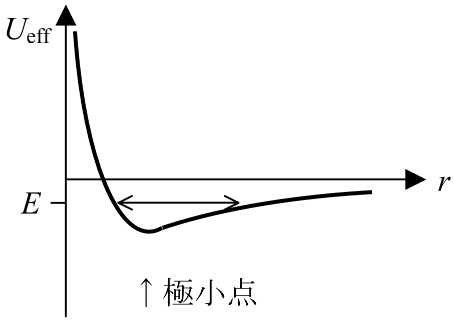
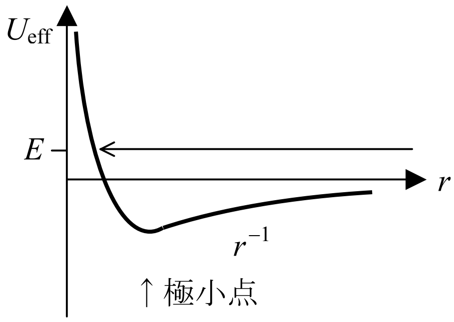
ラザフォード散乱

1 同符号の電荷粒子のクーロンポテンシャル

重力場（引力）の運動ではエネルギーの値によって異なる運動になった。



$E<0$ の場合は有限範囲で運動（楕円を真横から見たようす）



$E>0$ の場合は無限遠に飛び去る

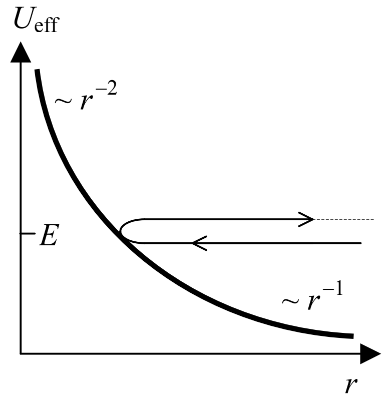
左は、地球など、楕円軌道を描いている天体。だんだん、E が上がって来ると遠くまで行って帰って来る（Halley Comet、76 年周期）ようになり、もっと高エネルギーだと、二度と戻って来ない（実際、そういう彗星も沢山ある）。

今回は、ポテンシャルが斥力 $U_{\mathrm{eff}}(r)=\dfrac{L^2}{2\mu r^2}+\dfrac{\alpha}{r}$ の場合を考えよう。但し $\alpha=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0>0$ である（$\varepsilon_0=10^7/4\pi c^2$）。

すると、右図で示されるとおり、任意の E に対して、

「一旦近づいて来て遠ざかり、二度と戻らない」

という運動をする。これを 散乱（scattering）という。



2 散乱

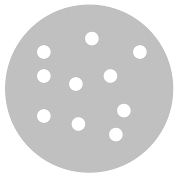
電子や原子核、波（古典的な波、電磁波、光）も散乱する（コンプトン散乱は光と電子）。

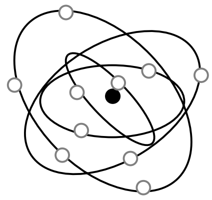
今回説明するのは古典的な粒子（質点）同士の散乱である「ラザフォード散乱」。

1911 年に英国のラザフォード卿が金箔にアルファ線（^{4}He の原子核。陽子 2＋中性子 2）を照射すると、8000 個に 1 個くらいの割合で、強く曲げられることを発見した。

これは、原子の内部に何か硬い点があることを示しており、当時信じられていたトムソンモデル（負電荷を持った電子が正電荷のかたまりの中に浮かんでいると言う「ぶどうパン」のようなモデ

ル、左図）が誤りで、右図のようになっていることを明らかにした。





3 散乱の場合の軌道　　【前回と$\alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ (>0)の項の符号以外は全く同じ】

Start：エネルギー保存則 $E = \underbrace{\frac{\mu \upsilon^2}{2}}_{\underbrace{\frac{\mu \dot{r}^2}{2}}_{\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{\mu r^2}} + \underbrace{\frac{\mu r^2 \dot{\theta}^2}{2}}_{L = m r^2 \dot{\theta}}} + \underbrace{U(\vec{x})}_{\frac{\alpha}{r}}$

注）Eは正の定数。

$\because$角運動量保存 $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ を $\underbrace{\dot{r} = \frac{dr(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}}_{\text{合成関数の微分の一般公式}}$ に代入して $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{\mu r^2}$

変数変換 $r = \frac{1}{u}$

変数分離 $d\theta = \frac{du}{\pm\sqrt{-u^2 - \frac{2\alpha\mu u}{L^2} + \frac{2\mu E}{L^2}}}$

変数変換 $u + \frac{\alpha\mu}{L^2} = x$ と置いて完全平方する。　　但し、$l = \left(\frac{\alpha\mu}{L^2}\right)^{-1}$

Goal：$\theta = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\arccos\frac{x}{a}$　　但し、$a = \sqrt{\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}$

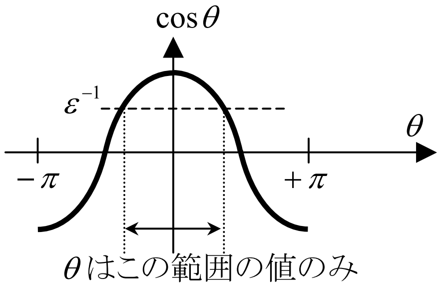
$\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{r^{-1} + l^{-1}}{a}$ であるから、

$\therefore r = \frac{1}{a\cos\theta - l^{-1}} = \frac{l}{la\cos\theta - 1} = \frac{l}{\varepsilon\cos\theta - 1}$ （双曲線）　但し、$\varepsilon = la$

ここで $\varepsilon = la = \frac{L^2}{\alpha\mu}\sqrt{\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ となるので常に $\varepsilon > 1$

注）$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2}r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{\alpha}{r}}_{U_{\text{eff}}}$ は全て正なので、$E > 0$しか有り得ない

4 $\varepsilon > 0$ の場合の軌道の形



4-1 r, θ の値の取り得る範囲

$r > 0$ なので、$r = \dfrac{l}{\varepsilon\cos\theta - 1} > 0$、よって、$\varepsilon\cos\theta > 1$

θ の範囲: $\cos\theta > \dfrac{1}{\varepsilon}$ （$\theta = -\arccos\dfrac{1}{\varepsilon} \sim +\arccos\dfrac{1}{\varepsilon}$）

r の範囲: $r = l/(\varepsilon - 1) \sim \infty$

4-2 r が発散する方向

$r \to \infty$ となるのは、$\cos\theta \to \varepsilon^{-1}$ となる時なので、$\theta \to \pm\arccos(\varepsilon^{-1})$ の二方向。

θ	$\theta_0 = +\arccos\dfrac{1}{\varepsilon}$	↘	0	↘	$-\theta_0 = -\arccos\dfrac{1}{\varepsilon}$
r	$+\infty$	↘	$r_{\min} = \dfrac{l}{\varepsilon - 1}$	↗	$+\infty$

というふうに、質点は無限遠(infinity, $+\infty$)からやってきて、また無限遠へ去って行く。

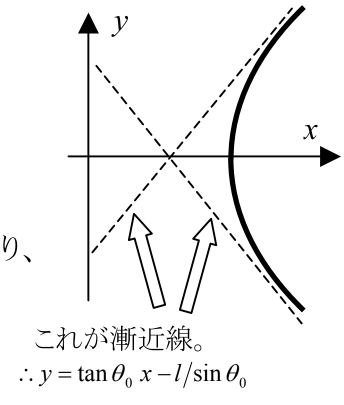
4-3 漸近線（ぜんきんせん）（無限遠で曲線が近づく直線, asymptotic line）

$\theta = \theta_0 + \delta\theta$ とすると（但し $\delta\theta$ は微小量とする。また、$\cos\theta_0 = 1/\varepsilon$ である）、

$\cos\theta \approx \cos\theta_0 - \sin\theta_0 \sin\delta\theta$ 【注意】テイラー展開で $\delta\theta$ の二次以上を無視した。

$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \sin\delta\theta$ $\because \sin\delta\theta \approx \delta\theta + O(\delta\theta^3),\ \cos\delta\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\delta\theta^2 + O(\delta\theta^4)$

であるから、$\delta\theta \to 0$ の極限では



$$r = l/(\varepsilon\cos\theta - 1) \approx l\cos\theta_0/(-\sin\theta_0\sin\delta\theta)$$

$$x = r\cos\theta \approx l\cos\theta_0 \cdot \frac{\cos\theta_0 - \sin\theta_0\sin\delta\theta}{-\sin\theta_0\sin\delta\theta} \approx \frac{l\cos^2\theta_0}{-\sin\theta_0 \cdot \delta\theta} + l\cos\theta_0$$

$$y = r\sin\theta \approx l\cos\theta_0 \cdot \frac{\sin\theta_0 + \cos\theta_0\sin\delta\theta}{-\sin\theta_0\sin\delta\theta} \approx \frac{-l\cos\theta_0}{\delta\theta} - \frac{l\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0}$$ より、

$$\frac{\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0}x = \frac{-l}{\delta\theta} + \frac{l\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{y}{\cos\theta_0} + \frac{l\cos\theta_0}{\sin\theta_0} + \frac{l\sin\theta_0}{\cos\theta_0}$$

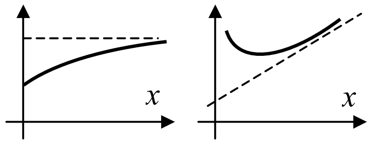
$$\therefore \tan\theta_0 \cdot x = y + l \cdot \left(\frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0} + \sin\theta_0\right) = y + \frac{l}{\sin\theta_0}$$

よって、 $y = \tan\theta_0 \cdot x - l/\sin\theta_0$ という直線の式になる。

この直線を漸近線(asymptotic line)と言う（曲線が $x \to \infty$ である直線に近づくこと）

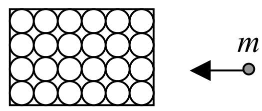
注）関数の値が一定値に近づくのは収束(convergence)とも言う

（一定値に漸近すると言っても間違いではない）。



5 初期条件の与え方

$M >> m$（ラザフォードの実験は M は銀）なので $\mu \approx m$ 。



・固体の中の原子（質量 $\approx M$）が標的

一般に運動の初期条件は、照射粒子の

1. 初期速度、 2. 初期位置

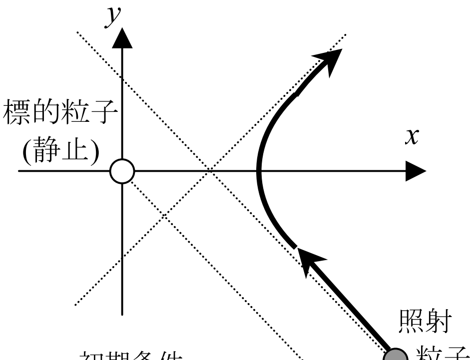
であるが、無限遠から来て再び飛び去るとすると、

右図のように

1′. 無限遠での速さ υ_∞

2′. 漸近線に平行で原点を通る直線との距離 s

で初期条件を指定するのがわかりやすい。



・初期条件 s, υ_∞

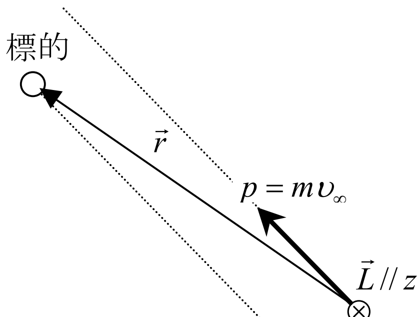
5-1 初期条件 υ_∞, s と軌道の形の関係

イ）全エネルギー $E = \frac{1}{2}\mu\upsilon_\infty^2$ ∵ポテンシャルエネルギーは 0

ロ）角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

z 軸に平行（⊗紙面に垂直）で、

大きさは $L = (\mu\upsilon_\infty)\cdot\underbrace{(\vec{r}\text{ の }\vec{p}\text{ に垂直な成分})}_{=s} = \mu\upsilon_\infty s$



・角運動量の求め方

この二つから、軌道の形のパラメタ l, ε は、

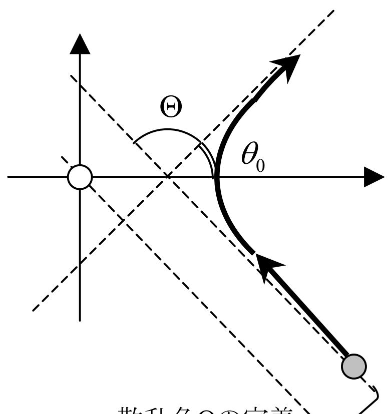
$$l = \frac{L^2}{\alpha\mu} = \frac{\mu^2\upsilon_\infty^2 s^2}{\alpha\mu} = \frac{\mu\upsilon_\infty^2 s^2}{\alpha}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2\upsilon_\infty^4 s^2}{\alpha^2}}$$

のように求められる。

5-2 漸近線の方向と散乱角

漸近線の方向（勾配）は $\cos\theta_0 = \varepsilon^{-1}$ より、



・散乱角Θの定義

$$\pm\tan\theta_0 = \pm\sqrt{\cos^{-2}\theta_0 - 1} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \pm\frac{\mu\upsilon_\infty^2 s}{\alpha}$$

【重要】s によって散乱方向が異なる

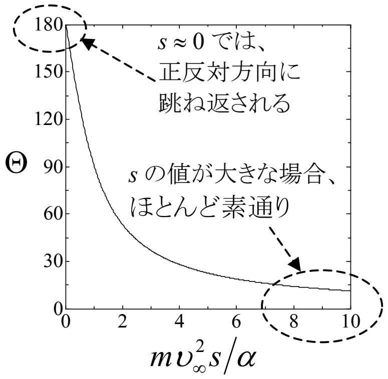
散乱角(散乱前後での角度の変化)は、前頁下図より、

$$\Theta = \pi - 2\theta_0$$

以上より、$\dfrac{m\upsilon_\infty^2 s}{\alpha} = \tan\dfrac{\pi-\Theta}{2} = \cot\dfrac{\Theta}{2}$ (右図)

なお θ_0 は s によっていろいろ変わるのであるから今後、θ と書く。

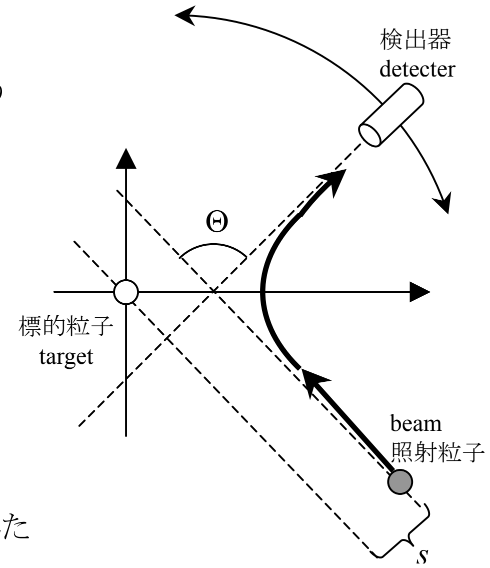
(これまでは軌道上の位置を指定するのに θ を使っていた。)



6 散乱断面積

すぐ上の式で Θ と s の関係がわかったので、s をいろいろ変えながらどちらの方角へ散乱するか調べれば良いと思うかも知れない。しかし、原子や原子核、あるいはクォークの性質を調べる実際の実験は、ひとつの粒子ではなく、一度に多数の粒子を照射して行われる。

シンクロトロンなどの加速器から発射された粒子ビームを標的(固体)に照射する実験がよく行われる(右図)。

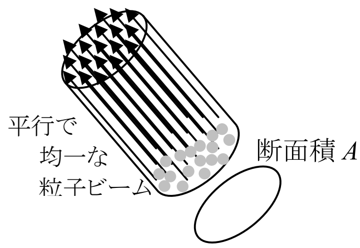


ここでは、

「ビームに含まれる粒子が入射方向からどれだけ曲げられた方向($\Theta = \pi - 2\theta$)にどれだけ多く散乱されるか」

を考えよう。

6-1 入射粒子のビーム(beam)



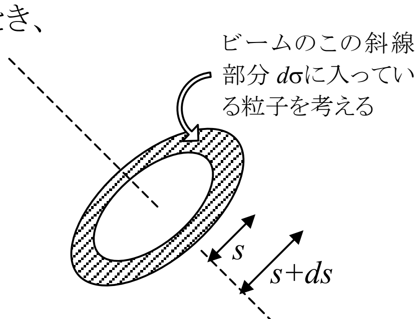
入射粒子は平行に進む、同じ速度の粒子集団であるとする。

⇒ これをビーム(beam)と言う。

ビームに垂直な断面を単位時間に通過する粒子数が n のとき、ビーム強度 j を

$$j = n/A$$

と定義する。ビーム断面積 A の中には、粒子は均一に含まれているとする。



6-2 入射粒子の衝突パラメタと、散乱されて出て行く方向

ビームに平行で標的に向かう直線ℓからの距離が

$$s \sim s + ds$$

の範囲の円周の断面積$d\sigma = 2\pi\, s ds$に入る粒子集団を考える。ds が十分小さければ、粒子集団は殆ど同じ軌道を描いて飛んで行くだろう。つまり、散乱角Θも、

$$\Theta \sim \Theta + d\Theta$$

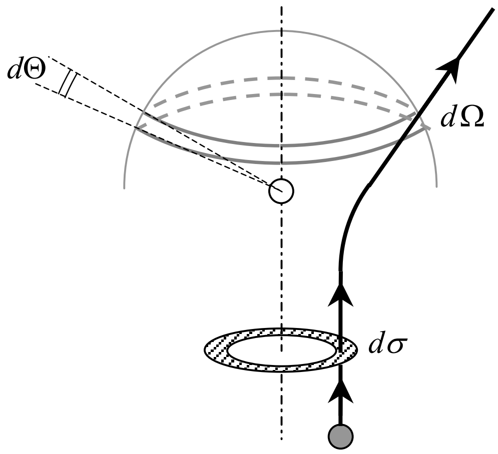
と、非常に狭い範囲に入っていると考えて良いだろう(∵殆ど同じ軌道を描くのだから)。

∴前の§5-2の結果より、

$$s = \frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\cot\frac{\Theta}{2} \qquad \text{微分して、} \therefore ds = \frac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\frac{\frac{d\Theta}{2}}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}$$

であるから、 $d\sigma = 2\pi\, s ds = 2\pi\left(\dfrac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\right)^2 \cot\dfrac{\Theta}{2}\cdot\dfrac{\frac{d\Theta}{2}}{\sin^2\frac{\Theta}{2}}$ を得る。

横から見た図



6-3 粒子が出て行く方向の範囲（はんい）

横から見ると、右下図のように標的粒子を中心としたドーム(dome)を突き抜けて行く(右上図)。

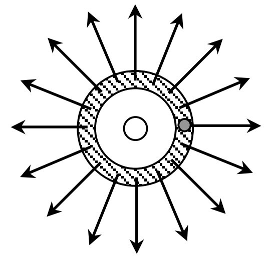
ビームは丸いので、出て行く方向は、入射方向の周りに放射状（ほうしゃじょう）に広がっている(右下図)

すると、粒子が出て行く方向の範囲は、

ドーム(半径 1 とする)上の帯状の面積(=立体角$d\Omega$)

ということになる。

上から見た図



ここで、以前やったように$d\Omega = 2\pi\sin\Theta\, d\Theta$であるから、

注) $\sin\Theta\, d\Theta\, d\phi$を、$0 \sim 2\pi$まで$\phi$で積分した

$$d\Theta = \frac{d\Omega}{4\pi\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}}$$

となり、上の結果に代入すれば、

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2m\upsilon_\infty^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}$$

という、有名な、ラザフォードの公式を得る。

テキストによって、電荷や質量を 4He 原子核の値($+2e$, $4m_p$)にしている場合があるので、係数が 2 倍や 4 倍、異なっていることがあります。注意してみよう。

7 ラザフォード散乱（発展的レポート）

7-1 $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ と Θ の関係をグラフにしてみよう。

定数 $\dfrac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}=1$ として良く、$\Theta=0\sim\pi$ の範囲とする。

まっすぐ突き抜けるのと、跳ね返る粒子ではどちらが多いだろうか？

トムソンモデルでは原子は「ふわふわしたもの」であり、アルファ線（4He の原子核、陽子二つ＋中性子二つからなる）を照射してもほとんど跳ね返る粒子は無いと思われていた。なぜ、跳ね返る粒子が現れたのだろうか？

7-2 いろいろな s に対する軌道を描いてみよう。

簡単のため、定数 $\dfrac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}=1$ として良い。

するとまず、s と散乱角の関係は、§5-2より、$s=\dfrac{\alpha}{m\upsilon_\infty^2}\cot\dfrac{\Theta}{2}=2\cot\dfrac{\Theta}{2}$

正確な軌道の形を描くのは難しいので、$r_{\min}=\dfrac{1}{\varepsilon-1}$ の関係を思い出して漸近線を描けば良い。

§5-1に出てきた式で、

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{m^2\upsilon_\infty^4 s^2}{\alpha^2}}=\sqrt{1+\frac{s^2}{4}},\quad l=\frac{m\upsilon_\infty^2 s^2}{\alpha}=\frac{s^2}{4}\ \text{を使うと、}\ r_{\min}=\frac{s^2/4}{\sqrt{1+s^2/4}-1}$$

$s=0,0.1,0.5,1,2,4,6,8,10$ くらいで 10 本程度描いてみよう。

ヒント）$s=0$ では、$r_{\min}=\lim_{s\to 0}\dfrac{s^2/4}{\sqrt{1+s^2/4}-1}=2,$

$$0=\cot\frac{\Theta}{2}\ \text{より、}\ \Theta=180^\circ$$

$s=1$ では、$r_{\min}=\dfrac{1/4}{\sqrt{1+1/4}-1}\approx 2.1,$

$$\frac{1}{2}=\cot\frac{\Theta}{2}\ \text{より、}\ \Theta\approx 127^\circ$$