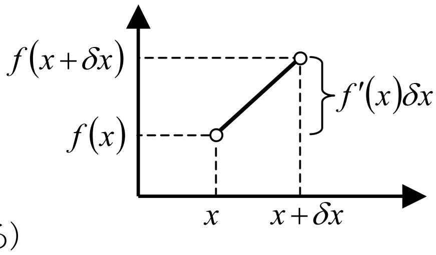
パソコンで微分方程式を解く



1. 基本

$$f(x+\delta x)=f(x)+\underbrace{f'(x)}_{\text{これが式で与えられる}}\delta x$$

δx は微小量とする（何に比べて小さいかは後で述べる）

2. 簡単な例—ただの積分

$f(0)=1$, $f'(x)=e^{-x}$

[もちろん、解析的に解けて $f(x)=-e^{-x}$ となる]

$$f(\delta x)=f(0)+e^{-0}\delta x=1+\delta x$$

$$f(2\delta x)=f(\delta x)+e^{-\delta x}\delta x=\overbrace{(1+\delta x)}^{\text{前の値}}+e^{-\delta x}\delta x$$

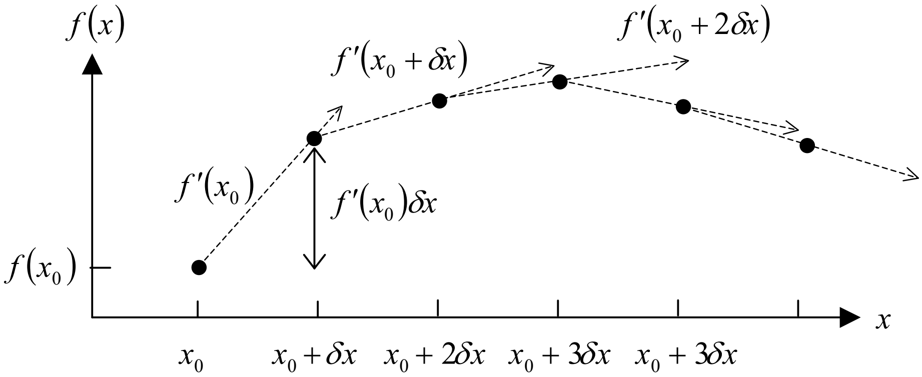
$$f(3\delta x)=f(2\delta x)+e^{-2\delta x}\delta x=\overbrace{((1+\delta x)+e^{-\delta x}\delta x)}^{\text{前の値}}+e^{-2\delta x}\delta x$$

基本的に、前の値にどんどん足して行く。これをオイラー(Euler)の方法と言う。

3. ビジュアルな説明

「勾配」に距離 δx をかけて足していく＝高さ $f(x)$

x を時間だと思うと、「速さ」に時間をかけて足していく＝距離 $f(x)$



$f'(x)$ が x に寄らず一定値なら $f(x_0+N\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)N\delta x$ と一発で求まる。

4. ステップ幅の取り方

$f(x)$ が直線と見なせる程度に小さくする

⇒場所によって異なるステップ幅を取れればベスト

厳密には $f(x+\delta x)=f(x)+f'(x)\delta x+\underbrace{\tfrac{1}{2}f''(x)\delta x^2}_{\text{直線と思ったときのずれ}}$ なので、

$f'(x)\delta x >> \dfrac{1}{2}f''(x)\delta x^2$ より、$\left|\dfrac{2f'(x)}{f''(x)}\right| >> \delta x$ ※誤差は積み重なって行くので厳密ではない

『$f(x)$が丸まっているところ』ではδxを小さくする必要がある。
注) 勾配$f'(x)$が大きいところではなく、曲率$f''(x)$が大きいところ

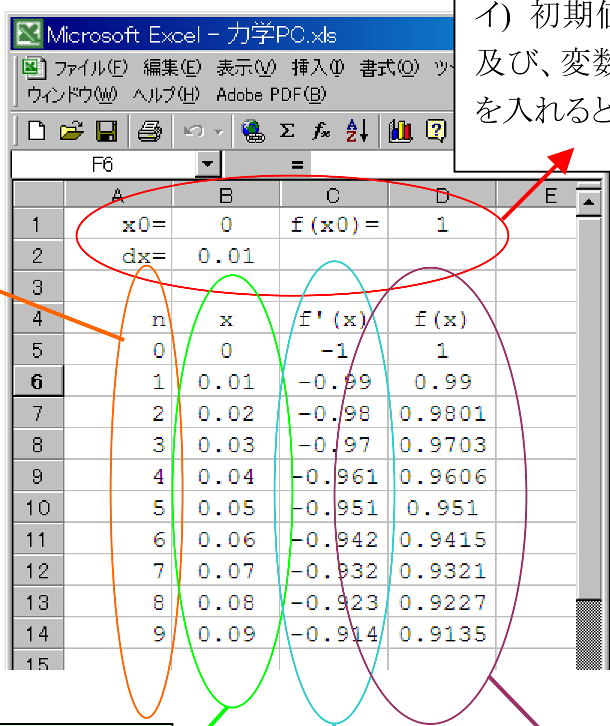
5. Excel の使用法
とても簡単な微分方程式$f'(x)=e^{-x}$（初期条件$f(x_0)=1$）を、
$x_0=0$を起点にして解いてみる。
コンピュータで解く場合は、初期条件の他に、「どこから解き始めるか」＝起点x_0を指定する。起点から初めて、

$f(x_0)=1$, $f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\delta x$, $f(x_0+2\delta x)=f(x_0+\delta x)+f'(x_0+\delta x)\delta x$, $\cdots$

のように計算して行く。

イ) 初期値 x0, f(x0)、及び、変数のステップ幅 dx を入れるところを作る

ロ) 変数の通し番号 n を左端の列に作る



	A	B	C	D	E
1	x0=	0	f(x0)=	1	
2	dx=	0.01			
3					
4	n	x	f'(x)	f(x)	
5	0	0	-1	1	
6	1	0.01	-0.99	0.99	
7	2	0.02	-0.98	0.9801	
8	3	0.03	-0.97	0.9703	
9	4	0.04	-0.961	0.9606	
10	5	0.05	-0.951	0.951	
11	6	0.06	-0.942	0.9415	
12	7	0.07	-0.932	0.9321	
13	8	0.08	-0.923	0.9227	
14	9	0.09	-0.914	0.9135	
15					

変数 x の列を作る。但し、x=x0+n*dx
Excel での式入力は、
B5 セル $\boxed{\texttt{+\$B\$1+A5*\$b\$2}}$
などとする

関数値 f(x0)の列を作り、Excel 式を入力
・n=0 のところは初期値 f(x0)を入力
・n=1 からは、f(x+dx)=f(x)+f'(x)*dx で関数値を求める
Excel 式は D6 セル $\boxed{\texttt{=+D5+C5*\$B\$2}}$

微分 f'(x0) の列を作り、Excel 式を入力する
この例では微分が数式で与えられているので簡単。C5 セル
$\boxed{\texttt{=-EXP(-B5)}}$ で良い

【応用】$(x, f(x))$をグラフにして見よう。ヒント—Excel のグラフ機能で「散布図」を使う。

6. もう少し複雑な例

$f'(x) = -f(x)$

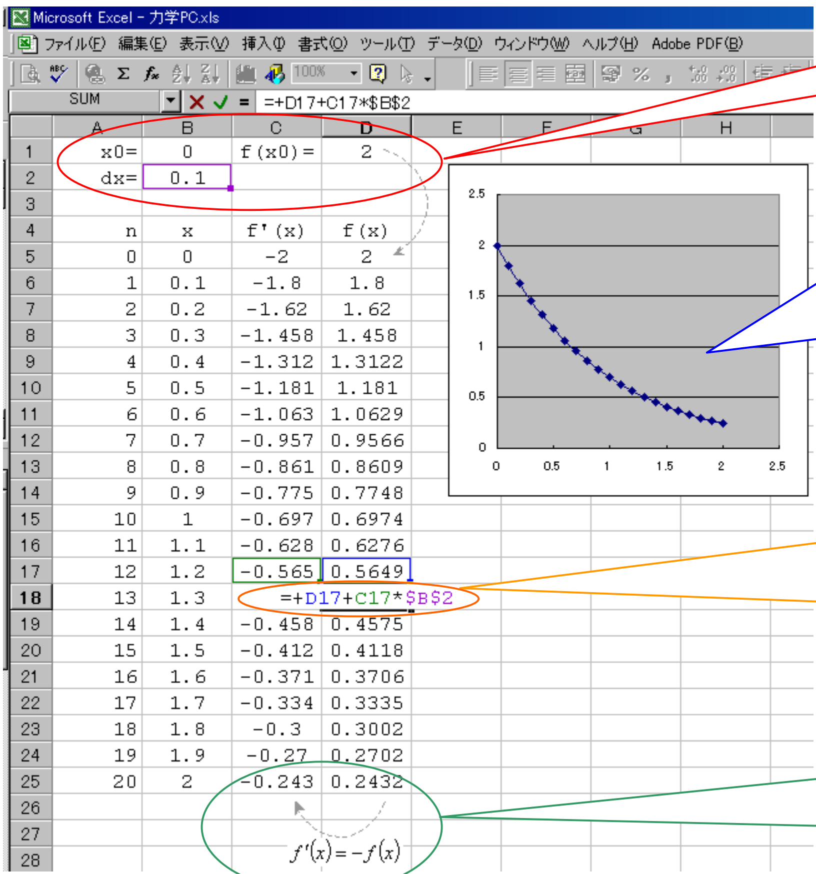
[これももちろん、解析的に解けて $f(x) = -e^{-x}$ となることを知っている]

最初の例と違うのは $f'(x)$がそのまま与えられず、数値計算で求める必要があるということ。

例) 初期条件 $f(0)=2$ として、起点は $x_0 = 0$ としよう。Step 幅はとりあえず $\delta x = 0.1$とする。

(とりあえずとしたのは、いろいろ試せということ)

step-0 $x_0 = 0,\ f(0) = 2$ を与方程式に代入して $f'(0) = -f(0) = -2$



	A	B	C	D
1	x0=	0	f(x0)=	2
2	dx=	0.1		
3				
4	n	x	f'(x)	f(x)
5	0	0	-2	2
6	1	0.1	-1.8	1.8
7	2	0.2	-1.62	1.62
8	3	0.3	-1.458	1.458
9	4	0.4	-1.312	1.3122
10	5	0.5	-1.181	1.181
11	6	0.6	-1.063	1.0629
12	7	0.7	-0.957	0.9566
13	8	0.8	-0.861	0.8609
14	9	0.9	-0.775	0.7748
15	10	1	-0.697	0.6974
16	11	1.1	-0.628	0.6276
17	12	1.2	-0.565	0.5649
18	13	1.3		=+D17+C17*B2
19	14	1.4	-0.458	0.4575
20	15	1.5	-0.412	0.4118
21	16	1.6	-0.371	0.3706
22	17	1.7	-0.334	0.3335
23	18	1.8	-0.3	0.3002
24	19	1.9	-0.27	0.2702
25	20	2	-0.243	0.2432
26				
27				
28				

初期条件や
ステップ幅の設定

【グラフ描画】
B 列と D 列を選択して
「散布図」を指定
(二つの列を選択するには
Ctrl キーを押しながらドラッグ)

【D 列】関数値 $f(x)$を、
$f(x_0 + (n+1)\delta x) =$
$f(x_0 + n\delta x) + f'(x_0 + n\delta x)\delta x$
に従って求める。
(ここが *essence*)

【C 列】導関数 $f'(x)$を与式
$f'(x) = -f(x)$に従って計算
セル C25 の中身は、
=D25

step-1 $x = x_0 + \delta x,\ \ f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{step-0で求めた結果を使う}}\delta x \ ,\ \ \underbrace{f'(x_0 + \delta x)}_{\text{次のstep用}} = -f(x_0 + \delta x)$

step-2 $x = x_0 + 2\delta x,\ \ f(x_0 + 2\delta x) = f(x_0 + \delta x) + \underbrace{f'(x_0 + \delta x)}_{\text{step-1で求めた結果を使う}}\delta x,\ \ \underbrace{f'(x_0 + 2\delta x)}_{\text{次のstep用}} = -f(x_0 + 2\delta x)$

$\vdots$

〔Excel シートの説明〕

A 列は0から始まる通し番号。

B 列は x 値。$x = x_0 + n\delta x$　Excel 式では、例えば B6 セルは、`=A6*$B$2`

C 列の導関数 $f'(x)$ は、右隣の D 列の導関数の値を使って $f'(x) = -f(x)$ と計算

D 列の関数値 $f(x)$ は、テイラー展開を使って計算。例えば D18 セルは、`=D17+C17*$B$2`

1. 二階微分方程式

$f''(x)$のみが、$f''(x)=h(f(x))$と与えられている場合。

ここからいよいよ本番。∵ニュートンの運動方程式は二階微分方程式である。

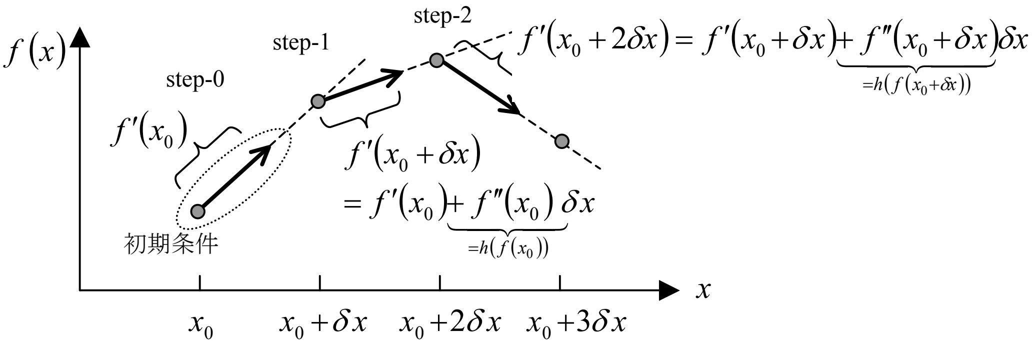
【考え方】

step-0　初期条件 $f(x_0)$，$f'(x_0)$

step-1　$f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\delta x$，$f'(x_0+\delta x)=f'(x_0)+\underbrace{f''(x_0)}_{=h(f(x_0))}\delta x$

step-2　$f(x_0+2\delta x)=f(x_0+\delta x)+f'(x_0+\delta x)\,\delta x$　$f'(x_0+2\delta x)=f'(x_0+\delta x)+\underbrace{f''(x_0+\delta x)}_{=h(f(x_0+\delta x))}\delta x$

⋮



・ポイント: 先に$f'(x)$をテイラー展開で求めておいてから$f(x)$のテイラー展開を計算

【注意】変数名を$x\to t$、関数名を$f\to x$と置き換えると、$x''(t)=h(x)$となり、
これはニュートンの運動方程式そのものだ（$mh=$力）。

例）$h=-g$（定数）は自由落下。

$h=+\alpha/x$は同種符号の電荷。$h=-ax$は単振動。（$a=k/m$）

2. 〔Excel シートの説明〕

次頁の例は単振動$h=-ax$の場合。定数$a=k/m$は、セル A3 に与えられている。

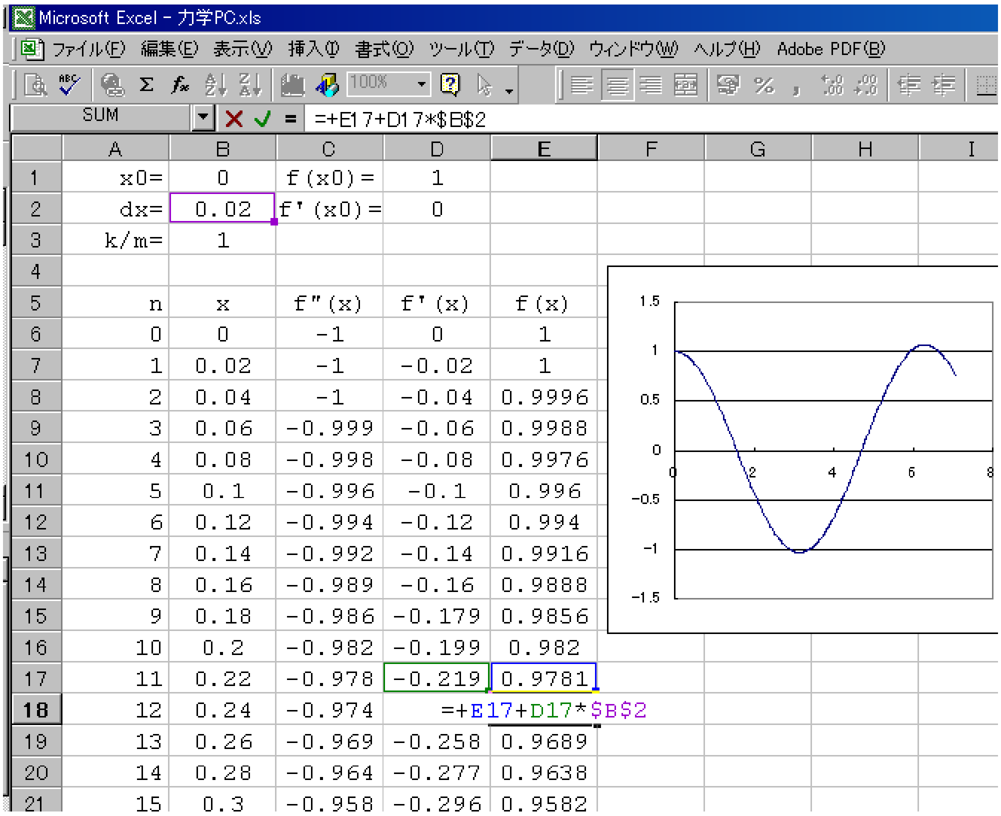
A 列: 0から始まる通し番号。

B 列: x値。$x=x_0+n\delta x$　例えば B18 セルは、`=A18*$B$2`

C 列: 二次導関数$f''(x)$。方程式で与えられている。例えば C18 セルは、`=-E18*$B$3`

D 列: 一次導関数。テイラー展開を使って計算。例えば D18 セルは、`=D17+C17*$B$2`

D 列: 関数値$f(x)$。テイラー展開を使って計算。例えば E18 セルは、`=E17+D17*$B$2`



	A	B	C	D	E
1	x0=	0	f(x0)=	1	
2	dx=	0.02	f'(x0)=	0	
3	k/m=	1			
4					
5	n	x	f"(x)	f'(x)	f(x)
6	0	0	-1	0	1
7	1	0.02	-1	-0.02	1
8	2	0.04	-1	-0.04	0.9996
9	3	0.06	-0.999	-0.06	0.9988
10	4	0.08	-0.998	-0.08	0.9976
11	5	0.1	-0.996	-0.1	0.996
12	6	0.12	-0.994	-0.12	0.994
13	7	0.14	-0.992	-0.14	0.9916
14	8	0.16	-0.989	-0.16	0.9888
15	9	0.18	-0.986	-0.179	0.9856
16	10	0.2	-0.982	-0.199	0.982
17	11	0.22	-0.978	-0.219	0.9781
18	12	0.24	-0.974	=+E17+D17*B2	
19	13	0.26	-0.969	-0.258	0.9689
20	14	0.28	-0.964	-0.277	0.9638
21	15	0.3	-0.958	-0.296	0.9582

3. 練習

ステップ幅や定数 k/m を変えて楽しもう。両者を大きくすると、振動の振幅がどんどん大きくなって行ってしまう様子を観察しよう。

※理由は、ステップ幅を大きくすると誤差が増えるからだ。

本当は $f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)(\delta x)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)(\delta x)^3+\cdots$

なのを、無理やり、

$$f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\delta x$$

と近似しているので、δx をあまり大きく出来ないのだ。

4. ファインマンによる高精度の解き方

上の単振動の例では、実は振幅が少しずつ増大して行ってしまっている。一周期分だけでも正確に出そうとすると、1000 ステップ以上に分割する必要がある。ルンゲ・クッタ法を始めとした、高精度な方法がいくつか開発されているが、ここでは極めて簡単に精度を上げられる、ファインマンの方法を紹介する。

エッセンスは導関数を決める点をステップ幅の半分のところにずらすだけだ。

旧)出発点の速度で行き先を決める

新)出発点と終点の位置の中間での速度で行き先を決める(下図)

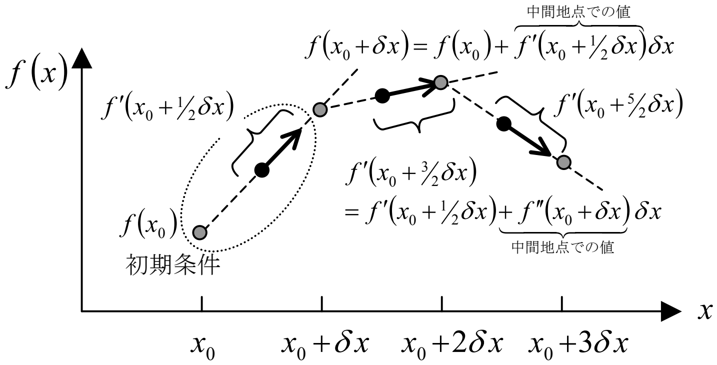
「終点がわからないのに、中間点がわかるか」、という突っ込みが出そうであるが、最初から、初期条件の座標を半分ずらして与えるのだ。つまり、

・座標の初期条件 $f(x_0)$

・導関数の初期条件 $f'\left(x_0+\tfrac{1}{2}\delta x\right)$

というふうにずらすのだ。

たったこれだけのことで驚くほど精度が上昇する。



【ファインマンの方法による精度の向上】

f の計算は $\delta x, 2\delta x, 3\delta x, \cdots$ で、

f' の計算は $\tfrac{1}{2}\delta x$, $\tfrac{3}{2}\delta x, \tfrac{5}{2}\delta x, \cdots$ で行う。

5. 【ファインマンの方法での考え方】

step-0 初期条件 $f(x_0)$, $f'\left(x_0+\tfrac{1}{2}\delta x\right)$

step-1

$$f(x_0+\delta x)=f(x_0)+f'\left(x_0+\tfrac{1}{2}\delta x\right)\delta x\,,\quad f'\left(x_0+\tfrac{3}{2}\delta x\right)=f'\left(x_0+\tfrac{1}{2}\delta x\right)+\underbrace{f''(x_0+\delta x)}_{=h(f(x_0+\delta x))}\delta x$$

step-2

$$f(x_0+2\delta x)=f(x_0+\delta x)+f'\left(x_0+\tfrac{3}{2}\delta x\right)\delta x\,,\quad f'\left(x_0+\tfrac{5}{2}\delta x\right)=f'\left(x_0+\tfrac{3}{2}\delta x\right)+\underbrace{f''(x_0+2\delta x)}_{=h(f(x_0+2\delta x))}\delta x$$

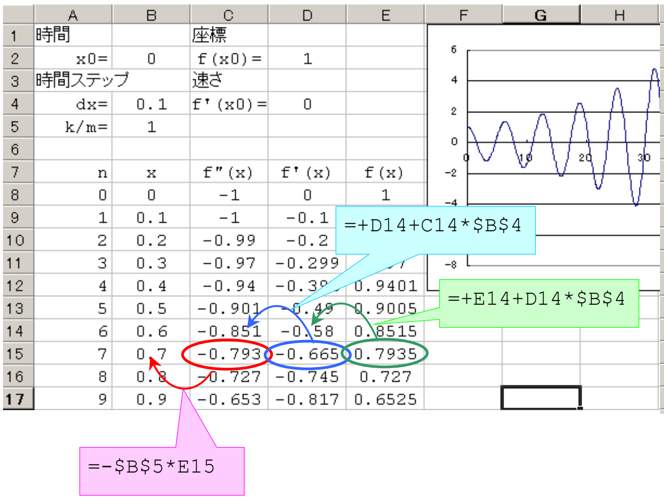
step-3

$$f(x_0+3\delta x)=f(x_0+2\delta x)+f'\left(x_0+\tfrac{5}{2}\delta x\right)\delta x\,,\quad f'\left(x_0+\tfrac{7}{2}\delta x\right)=f'\left(x_0+\tfrac{5}{2}\delta x\right)+\underbrace{f''(x_0+3\delta x)}_{=h(f(x_0+3\delta x))}\delta x$$

※以上のように、速度 f' のテイラー展開のところで、f'' の値を、前のステップではなく、計算したばかりの「現在のステップの値」を使うのだ。

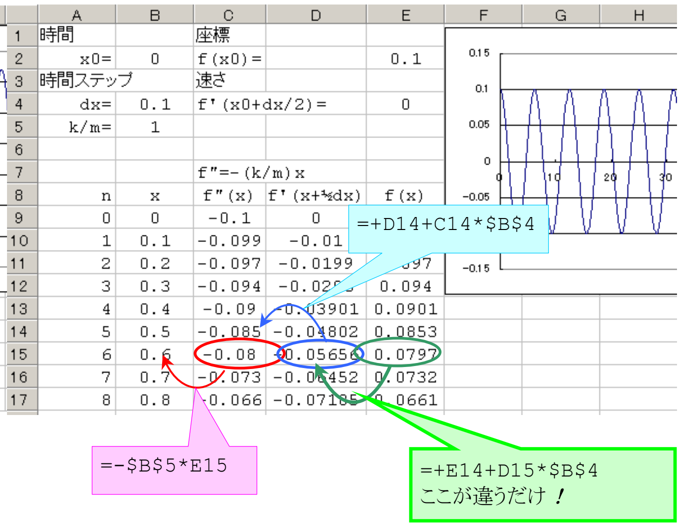
6.　二つの方法の精度比較―単振動の問題

通常の方法



	A	B	C	D	E
1	時間		座標		
2	x0=	0	f(x0)=	1	
3	時間ステップ		速さ		
4	dx=	0.1	f'(x0)=	0	
5	k/m=	1			
6					
7	n	x	f"(x)	f'(x)	f(x)
8	0	0	-1	0	1
9	1	0.1	-1	-0.1	[illegible]
10	2	0.2	-0.99	-0.2	[illegible]
11	3	0.3	-0.97	-0.299	[illegible]
12	4	0.4	-0.94	-0.39[illegible]	0.9401
13	5	0.5	-0.901	-0.49	0.9005
14	6	0.6	-0.851	-0.58	0.8515
15	7	0.7	-0.793	-0.665	0.7935
16	8	0.8	-0.727	-0.745	0.727
17	9	0.9	-0.653	-0.817	0.6525

ファインマンの方法



	A	B	C	D	E
1	時間		座標		
2	x0=	0	f(x0)=		0.1
3	時間ステップ		速さ		
4	dx=	0.1	f'(x0+dx/2)=		0
5	k/m=	1			
6					
7			f"=-(k/m)x		
8	n	x	f"(x)	f'(x+½dx)	f(x)
9	0	0	-0.1	0	[illegible]
10	1	0.1	-0.099	-0.01	[illegible]
11	2	0.2	-0.097	-0.0199	[illegible]97
12	3	0.3	-0.094	-0.02[illegible]	0.094
13	4	0.4	-0.09	-0.03901	0.0901
14	5	0.5	-0.085	-0.04802	0.0853
15	6	0.6	-0.08	-0.05656	0.0797
16	7	0.7	-0.073	-0.06452	0.0732
17	8	0.8	-0.066	-0.07185	0.0661

時間ステップを同じ（*dx*=0.1）にして、通常の方法では振幅が異常に増大してしまうのに対し、ファインマンの方法では一定に落ち着いている。

Excel の式では、通常の方法とファインマンの方法は、たった一箇所違うだけであることに驚いて欲しい。通常の方法では、座標 f(x) も速度 f'(x) も同じ時刻の値（どちらも左上の 14 番セル）を用いているが、ファインマンの方法では、速度 f'(x) のみ、隣の 15 番セルの値を使っている。

1. ポテンシャル$U(x,y)$における二次元平面内の運動の問題
   座標$\vec{x}=(x,y)$，速度$\vec{\upsilon}=(\upsilon_x,\upsilon_y)$　四つの変数が登場する。
   加速度は、$\vec{a}=(a_x,a_y)=\vec{f}/m=-\nabla U(x,y)/m$で座標から決められる。

【復習】重力は中心力であるため、角運動量が保存しいつでも平面内の運動に帰着。

2. 通常の方法による解法（各変数がベクトルになっているだけ）

注）前のプリント PC2 とは変数名が異なる。慣れて来たので、ここからは、実際の変数名(*x* 座標, *t* 時刻, *etc.*)を使うことにする。

STEP-0　$\vec{x}(0)$,　　$\vec{\upsilon}(0)$

STEP-1　$\vec{x}(\delta t)=\vec{x}(0)+\vec{\upsilon}(0)\delta t$,　$\vec{\upsilon}(\delta t)=\vec{\upsilon}(0)-\dfrac{\nabla U(\vec{x}(0))}{m}\delta t$

STEP-2　$\vec{x}(2\delta t)=\vec{x}(\delta t)+\vec{\upsilon}(\delta t)\delta t$,　$\vec{\upsilon}(2\delta t)=\vec{\upsilon}(\delta t)-\dfrac{\nabla U(\vec{x}(\delta t))}{m}\delta t$

STEP-3　$\vec{x}(3\delta t)=\vec{x}(2\delta t)+\vec{\upsilon}(2\delta t)\delta t$,　$\vec{\upsilon}(3\delta t)=\vec{\upsilon}(2\delta t)-\dfrac{\nabla U(\vec{x}(2\delta t))}{m}\delta t$

以下続く…

n ステップ目は、

STEP-3　$\vec{x}(n\delta t)=\vec{x}((n-1)\delta t)+\vec{\upsilon}((n-1)\delta t)\delta t$,　$\vec{\upsilon}(n\delta t)=\vec{\upsilon}((n-1)\delta t)-\dfrac{\nabla U(\vec{x}((n-1)\delta t))}{m}\delta t$

と書ける。これをベクトル形式でなく、成分で書いて見ると、

$$\begin{cases} x(n\delta t)=x((n-1)\delta t)+\upsilon_x((n-1)\delta t)\delta t \\ y(n\delta t)=y((n-1)\delta t)+\upsilon_y((n-1)\delta t)\delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \upsilon_x(n\delta t)=\upsilon_x((n-1)\delta t)-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}U(x((n-1)\delta t),y((n-1)\delta t))\delta t \\ \upsilon_y(n\delta t)=\upsilon_y((n-1)\delta t)-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}U(x((n-1)\delta t),y((n-1)\delta t))\delta t \end{cases}$$

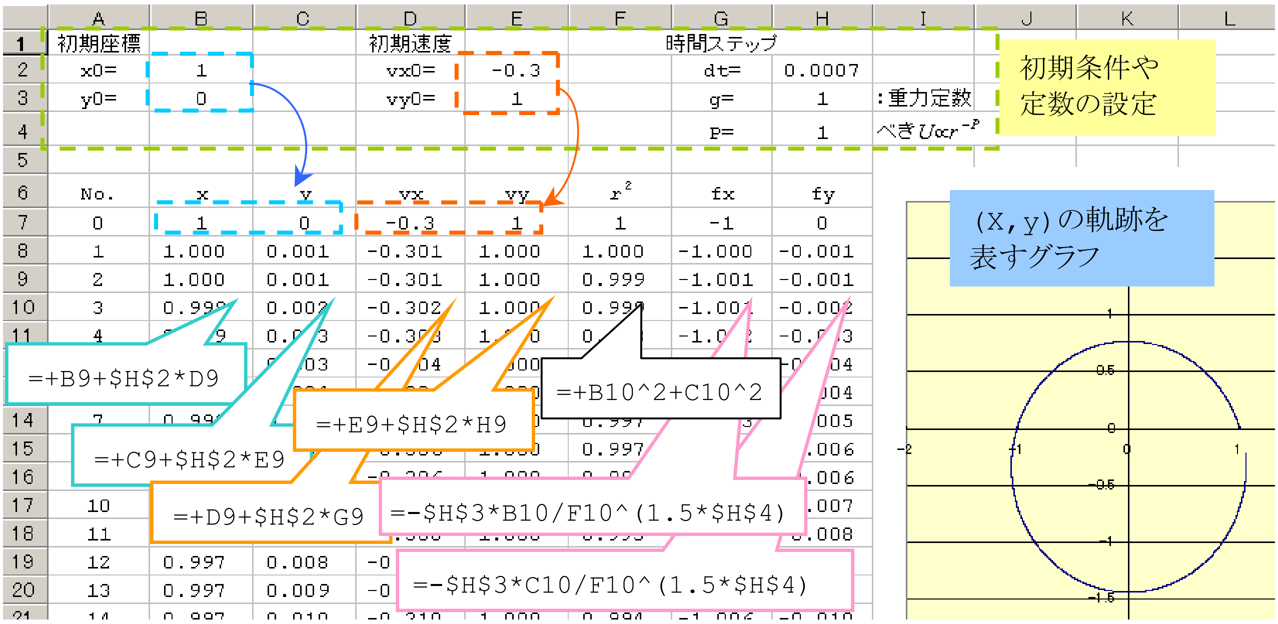
となる。

3. 重力ポテンシャルの場合
   上式のυ_x,υ_yに$U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}$を代入して見ると、$\frac{\partial}{\partial x}U(r)=\dfrac{\alpha x}{r^2}$，$\frac{\partial}{\partial y}U(r)=\dfrac{\alpha y}{r^2}$などより、

$$\begin{cases} \upsilon_x(n\delta t)=\upsilon_x((n-1)\delta t)-\frac{\alpha}{m}\dfrac{x((n-1)\delta t)}{x((n-1)\delta t)^2+y((n-1)\delta t)^2}\delta t \\ \upsilon_y(n\delta t)=\upsilon_y((n-1)\delta t)-\frac{\alpha}{m}\dfrac{y((n-1)\delta t)}{x((n-1)\delta t)^2+y((n-1)\delta t)^2}\delta t \end{cases}$$

となって、意外と単純な計算であることがわかる。
また、$r^2=x^2+y^2$の値をυ_x,υ_yの二箇所で使うので、前もって計算しておいた方が簡単になる。

以上を踏まえて Excel のシートを見てみよう。



通し番号 n（時刻$=ndt$ ）　座標　速度　x^2+y^2　加速度$=-\nabla U(\vec{x})/m$は、座標から計算。

$r^2=x^2+y^2$ は左隣のセルで計算しておく

$\vec{x}_0=(1,0)$から、速度$\vec{v}_0=(-0.3,1)$、すなわち、斜め左上方向に向けて出発し、重力ポテンシャル$U=1/r$を感じて、少しずつ速度を変えながら楕円運動するようすが現れている。もう少しで一周するところであるが、実は「一万行」のデータが必要。これほど細かくしないと、きれいに回らないのだ。

4. ファインマンの方法

【考え方】

STEP-0　$\vec{x}(0)$,　$\vec{v}(\frac{1}{2}\delta t)$

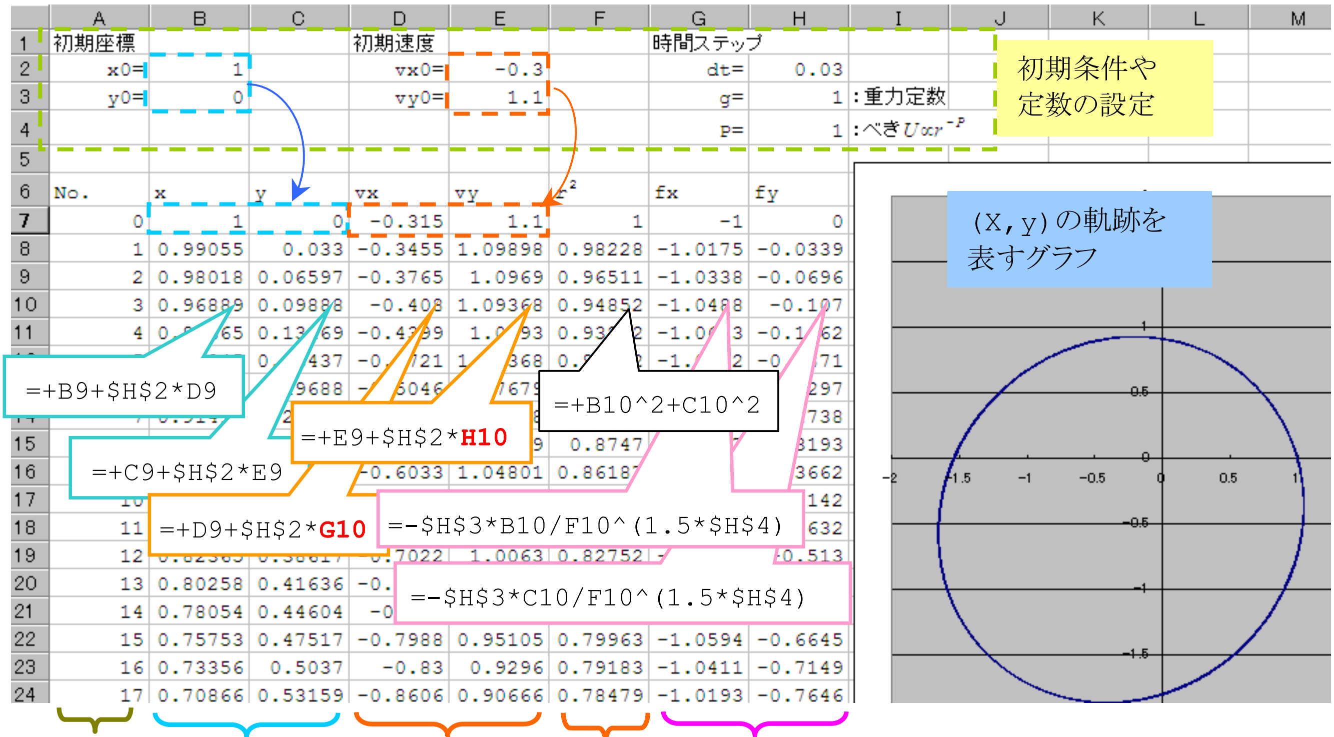
STEP-1　$\vec{x}(\delta t)=\vec{x}(0)+\vec{v}(\frac{1}{2}\delta t)\delta t$,　$\vec{v}(\frac{3}{2}\delta t)=\vec{v}(\frac{1}{2}\delta t)-\underbrace{\frac{\nabla U(\vec{x}(\delta t))}{m}}_{\vec{a}(\delta t)}\delta t$

STEP-2　$\vec{x}(2\delta t)=\vec{x}(\delta t)+\vec{v}(\frac{3}{2}\delta t)\delta t$,　$\vec{v}(\frac{5}{2}\delta t)=\vec{v}(\frac{3}{2}\delta t)-\frac{\nabla U(\vec{x}(2\delta t))}{m}\delta t$

STEP-3　$\vec{x}(3\delta t)=\vec{x}(2\delta t)+\vec{v}(\frac{5}{2}\delta t)\delta t$,　$\vec{v}(\frac{7}{2}\delta t)=\vec{v}(\frac{5}{2}\delta t)-\frac{\nabla U(\vec{x}(3\delta t))}{m}\delta t$

加速度を計算するところで、前のステップではなく、今計算したところの座標を使っている。たったこれだけでどれほどの差が出るだろうか。

5. ファインマンの方法での Excel シート
テイラー展開で微分を計算する時刻が、座標 x,y と速度 vx,vy とで違うところに注意。

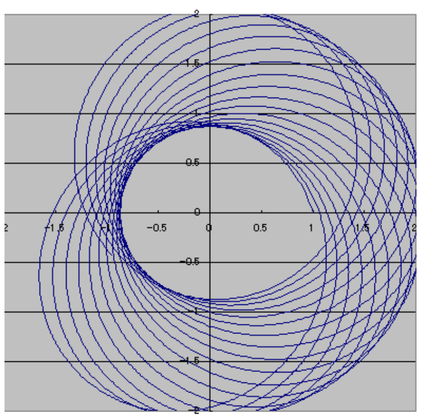


通し番号 n（時刻=ndt ）　座標　速度　x^2+y^2　加速度$=-\nabla U(\vec{x})/m$ は、座標から計算。
$r^2=x^2+y^2$ は左隣のセルで計算しておく

通常の方法に比べて、時間ステップを40倍以上にしても、全く、「ずれ」が発生していない。グラフ上で、軌跡は 40 周以上回っている。通常の方法で、dt=0.03 にしてしまうと、計算誤差で、どこかへすっ飛んで行ってしまう。

【注意】初期速度を速くし過ぎると、運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー＝E>0 となってしまい、どこかへすっ飛んで行ってしまう。

最初は出来るだけ円に近い軌道を描くように、初期条件を選んで、うまく回りだしたら、dt をいろいろ変えて、どこまで大きくして良いか判断しよう。



6. 重力のべきが－1からずれたらどうなるか？
自分で試そう。$U=r^{-1.02}$ の場合のグラフを載せておく。
僅かにずれただけで、軌道は閉じなくなる。

パソコンを使って∇を理解する。

ポテンシャルU（位置エネルギー） ⇔ 力 $\vec{f}=-\nabla U$

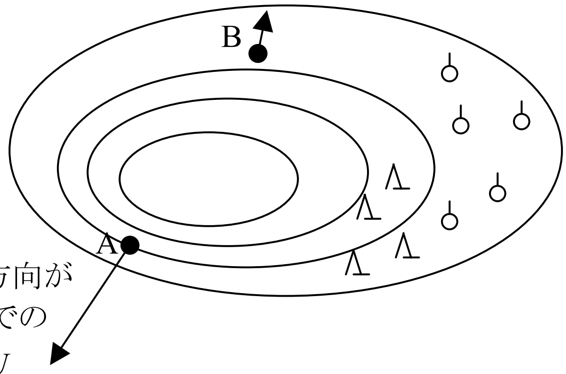
高さ　　　　　　傾(かたむ)いている方向（玉を置いたとき転がる方向）

Analogy：ポテンシャル＝地図の等高線(contour)。

力＝等高線に垂直方向に転がる。等高線の間隔(かんかく)が狭(せま)いと急勾配(きゅうこうばい)で強い力。

⇒ ポテンシャルの等高線(contour map)を描けば、力のかかるようすがわかる

位置 A では等高線の間隔が広いので、勾配は小さく、力も弱い。

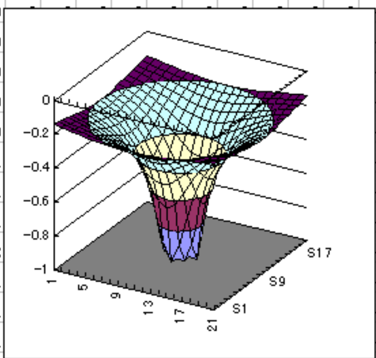


矢印の方向が位置 A での $\vec{f}=-\nabla U$

=+S3*F1

=-1/SQRT(+T4^2+B5^2+0.001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		Q	R	S	T	U			X	Y
1	スケール(縮尺)=					1																			
2																									
3		n_x=	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		6	7		9	10	通し番号	
4	n_y=		-5	-5	-4	-4	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	縮尺(F1)をかけた値	
5	-10	-5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	$U=1/r=(x^2+y^2)^{-0.5}$	
6	-9	-5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
7	-8	-4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0											-0		
8	-7	-4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0											-0		
9	-6	-3	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0											-0		
10	-5	-3	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0											-0		
11	-4	-2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0											-0		
12	-3	-2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1											-0		
13	-2	-1	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1											-0		
14	-1	-1	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1											-0		
15	0	0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-2											-0		
16	1	0.5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1											-0		
17	2	1	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1											-0		
18	3	1.5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1											-0		
19	4	2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
20	5	2.5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
21	6	3	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
22	7	3.5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
23	8	4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
24	9	4.5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		
25	10	5	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0		



セルの式のコピーのやり方（ひとつひとつ打ち込むのは大変なのでマウスでドラッグしてコピー）

23	8	4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0
24	9	4.5	-0							
25	10	5	-0							
26										

コピーしたいセルをマウスでクリックして、右下の点「•」を好きなだけドラッグする（この場合は右方向でしょうね）。すると式の中のセル番号を自動的に変えながらコピーされる。但し、$のついた番号は固定のまま。