1 重力ポテンシャル中の運動

円運動は既習。初期条件が $\dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{GmM}{r^2}$ からずれたらどうなるか考えよう—結果は楕円 Goal。

・ヨハネス・ケプラー(1571-1630)は観測(自分で観測したのではなく、ティコブラーエの観測結果の解析)によってケプラーの三法則を導出:「楕円軌道、面積速度一定、周期三乗∝軌道長半径の二乗」

・ニュートンが微分法の開発によってケプラーの三法則を理論的に導くことに成功した。

2 運動方程式と運動の相似

$\boxed{\text{同じ運動方程式（同じ微分方程式）→同じ運動}}$　これはあたりまえのこと。

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \text{重力場} -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt}$$

ここで、$\vec{r} = A\vec{R}$ と全ての長さを A 倍にして見る。すると、

$$\text{左辺}: -\frac{GMm}{A^2R^2}\hat{R}\text{、右辺}: mA\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad \because \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\left(A\vec{R}\right)}{dt^2} = A\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

となり、元の運動方程式と一致はしない。しかし、さらに、時間を $t = BT$ と置いてみると、

$$\text{左辺} -\frac{GMm}{A^2R^2}\hat{R}\text{、右辺 } m\frac{A}{B^2}\frac{d^2\vec{R}}{dT^2}$$

となって、もし、$\dfrac{A^3}{B^2} = 1$ ならば左辺と右辺は一致して、

$$-\frac{GMm}{R^2}\hat{R} = m\frac{d^2\vec{R}}{dT^2}$$

となる。これは単に $r \to R$ と変数名を変えただけで、

全く $\boxed{\text{同じ運動方程式}}$ である ⇒ よって、$\boxed{\text{同じ運動}}$ になるはず。

つまり、距離（長半径）を A 倍にしたら、時間（周期）は $A^{2/3}$ 倍になる。

3 角運動量

円運動では $L = rp$ であるが、一般には $\vec{p}$ の $\vec{r}$ への垂直成分と、$\vec{r}$ との積。

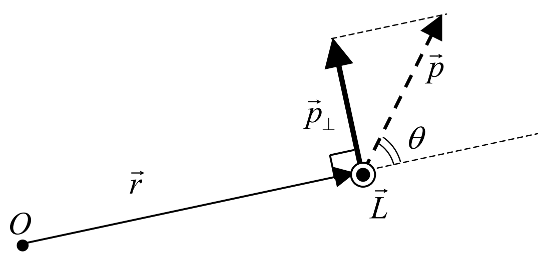
注）平行成分は原点に向かうので、「回転」ではないから除外。

$\vec{p}_\perp$ の大きさは、$p\sin\theta$ なので、結局、

$$L = rp\sin\theta$$

である。方向は回転の軸に平行に取るといろいろ便利なので、

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



と定義すると、一石二鳥で、大きさも方向も定まる。

【性質】　$\vec{L}$ は $\vec{p}$ と $\vec{r}$ のいずれにも垂直。

$\vec{L}$ は原点の取り方で変わる。よって必ず、「どこの点のまわりの角運動量」と言うようにする。

角運動量のイメージ ～ 運動量の回転版。どのくらい激しく回っているか。方向は回転軸。

$\dot{\vec{p}} = \vec{f}$ に対し、$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f}$ =トルク（てこの原理で、大きな半径で回した方が激しく回る）

4 角運動量の時間変化

時間で微分してみると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

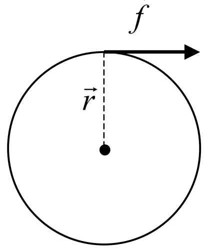
注）外積に積の微分の公式が適用できるか
どうかはそれほど自明ではない。
自分で成分で書いてみて確かめよう。

【復習】
二つのベクトルの、
内積は平行な度合い。
外積は垂直な度合い。

となり二つの項が現れる。

〔第一項〕$= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dfrac{\vec{p}}{m} \times \vec{p} = 0$　同じベクトル同士の外積なのでゼロ

〔第二項〕$= \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{f}$　∵ニュートンの運動方程式



よって、$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f}$　が得られるが、これはどういう式だろうか。

右図からわかるように、

「角運動量の変化には $\vec{r}$ に垂直な力のみが効く」

ということだ。意味は、

- ・角運動量の時間変化はトルクに比例（運動方程式の回転運動版とか剛体版というべきもの）
- ・力点の支点からの距離が遠いほど、角運動量は激しく変化（てこの原理）

5 中心力と角運動量

常に原点に向かう力を考えよう

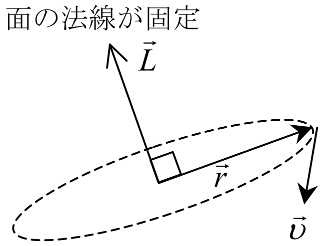
$\vec{f} = f(r)\,\hat{r}$　と書ける。これを「中心力」と呼ぶ。　但し、$\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ は $\vec{r}$ 方向の単位ベクトル

$f(r)$ は力の大きさで原点からの距離のみに依存する。　注）もし、方向に依存するなら $f(\vec{r})$ と書く

中心力の例としては、

- ・原点に固定された質点による重力 $\propto r^{-2}$
- ・原点に固定された荷電粒子によるクーロン力 $\propto r^{-2}$
- ・原点に固定されたばね $\propto r^{1}$

などがある。中心力による運動において角運動量がどうなるか見て見ると、



$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = 0$$

となって、時間微分がゼロになるので保存される。

$\vec{L}$ の方向も固定なので、運動は初期条件 $\vec{r}_0$, $\vec{\upsilon}_0$ で決まる平面内に固定

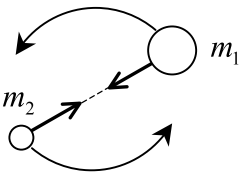
∵その平面の法線が L であり、それが常に固定。

⇒意味—中心力は θ に寄らないので、回転に対して対称であるため角運動量保存

（*c.f.* 並進に対して対称であると、運動量保存）

6 二体問題

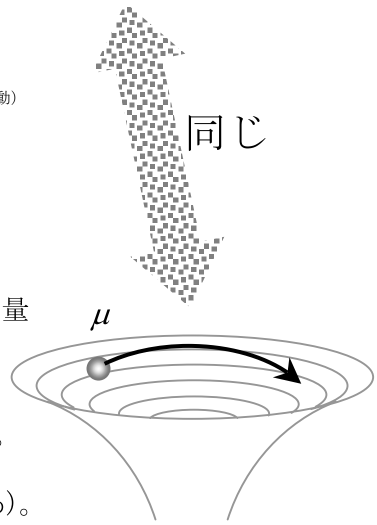
重力場の問題は本当は二つの質点の問題 $\mapsto$ どちらの質点（地球、太陽）も動く。



$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{f}_{12} \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{f}_{21} \end{cases}$$ の連立微分方程式（式は6本*!!*）

ここで　$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ 作用反作用の法則、より、 $m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = 0$

よって、$\vec{X} = \dfrac{m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2}{m_1 + m_2}$ （重心座標）と置くと $\dot{\vec{X}} =$ 一定 （等速直線運動）



これは、お互いの座標の加重平均のようなもの。

それでは、お互いの座標の差（相対位置）はどうだろうか。

$$\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \frac{\vec{f}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{f}_{21}}{m_2} = \vec{f}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{\vec{f}}{\mu},$$ 但し $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — 換算質量

$\therefore \mu\left(\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2\right) = \mu\ddot{\vec{x}} = \vec{f}$ というポテンシャル中の一質点の問題に還元（reduced）された。

（直感的にも、$m_1 \to \infty$ ならば、m_2 は m_1 のまわりをぐるぐる回っていると言える）。

7 エネルギー保存則

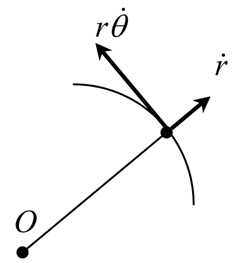
単純に $E = \dfrac{\mu\upsilon^2}{2} + U(\vec{x})$ である。$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$ がベクトルなので、極座標で表すと、

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)$$ となるので、

自乗すると、クロスタームはキャンセルして、

$$\upsilon^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

二つの項のイメージは右図。



運動エネルギーの中身
（動径方向と接線方向）

8 重力場中におけるエネルギー保存と角運動量保存

イ)エネルギー保存: $E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\mu}{2}r^2\dot{\theta}^2-\frac{\alpha}{r}$, 但し$\alpha=Gm_1m_2$, E＝定数。

ロ)角運動量保存: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\left(r\cos\theta, r\sin\theta, 0\right)\times m\left(\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta, 0\right)$

$=m\left(0,0,r^2\dot{\theta}\right)$＝定数。　　但し、角運動量の方向をz軸に取った。

$\therefore L=mr^2\dot{\theta}=mr\upsilon$となって、良く知っている結果(但し円運動の場合)と一致。

"$r\to$小のところでは速く、$r\to$大のところではゆっくり通過"

【注】昔習った面積速度$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$とは、実は角運動量(に比例した量)のことだった。

この二つイ)、ロ)を組み合わせると、

$$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{\mu}{2}r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2-\frac{\alpha}{r}=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}$$

と、rのみ(スカラー量)の運動方程式が得られた。

【注】定数について。$\alpha=Gm_1m_2$, $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$は最初から与えられる定数。

Lは運動の初期条件(角運動量の初期値)として与えられる定数。

最初の項は運動エネルギーみたいな項で、二番目はポテンシャルみたいな項に見える。

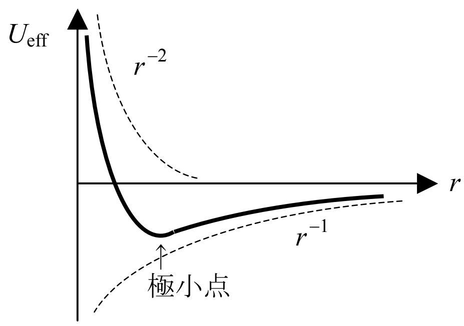
そこで、

$$U_{\mathrm{eff}}(r)=\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}$$

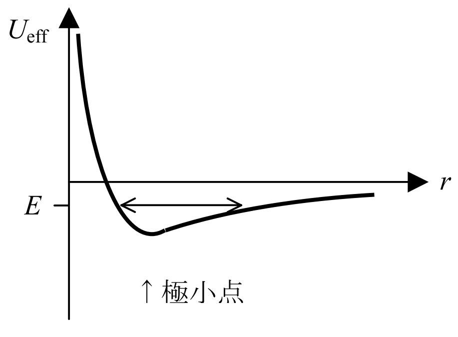
と置いてやると、右図のように極小点が現われる。

このU_{eff}を有効ポテンシャル(*effective potential*)と言う。

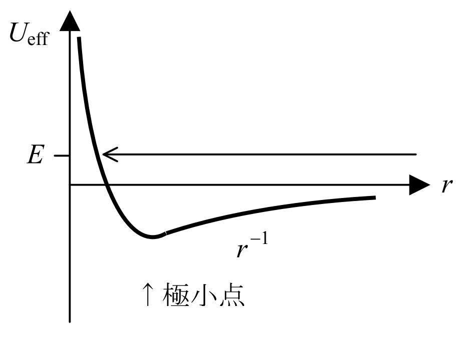
【意味】U_{eff}には遠心力みたいな項が入っているので、はっきり言って、ポテンシャルでは『無い』。



しかし、こういうのをまとめてポテンシャルと見なすと$E=\frac{\mu}{2}\dot{r}^2+U_{\mathrm{eff}}$となってわかりやすい。



$E<0$の場合は有限範囲で運動
(楕円を真横から見たようす)



$E>0$の場合は無限遠に飛び去る

9 軌道の形

9-1 $\dot{r}$ を消去（$r \leftrightarrow \theta$ の形に持ち込む）。

$\dot{r} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ に、角運動量の式 $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ を代入すると、$\dot{r} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{L}{\mu r^2}$ が得られるので、

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

となって、$r \leftrightarrow \theta$ の関係式が得られた。しかしこれを解くために $r = \dfrac{1}{u}$ と変数変換すると、

【理由】$L/\mu r^2$ の r を消すためなのだが、そう簡単には思いつかないことだ

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

なので、これを $E =$ の式に代入すると、

$E = \dfrac{\mu}{2}\left(-\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{L}{\mu}\right)^2 + \dfrac{L^2u^2}{2\mu} - \alpha u$ となる。

【この微分方程式の見方】 複雑な定数に惑わされてはいけない

定数＝ 定数$\times\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 +$ 定数$\times u^2 +$ 定数$\times u$

というとても簡単な形であることに気が付かなくてはならない。

9-2 変数分離

上の式は一階微分しか含んでいない。

一階の微分方程式は大抵確実に解ける。(⇔二階微分方程式は万能な解き方はない)

左辺と右辺に u と θ を分けてしまえば良い。

もちろん、$\dfrac{du}{d\theta}$ も du と $d\theta$ に分けてしまう。

まず定数係数を整理してから始めることにする。

$\dfrac{du}{d\theta}$ を左辺に持って行って、$\left(-\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{L}{\mu}\right)^2 = -\dfrac{L^2u^2}{\mu^2} + \dfrac{2\alpha u}{\mu} + \dfrac{2E}{\mu}$

開平して、$\dfrac{du}{d\theta} = \pm\dfrac{\mu}{L}\sqrt{-\dfrac{L^2u^2}{\mu^2} + \dfrac{2\alpha u}{\mu} + \dfrac{2E}{\mu}} = \pm\sqrt{-u^2 + \dfrac{2\alpha\mu u}{L^2} + \dfrac{2\mu E}{L^2}}$

ここで変数分離すると、

$$\frac{du}{\pm\sqrt{-u^2+\frac{2\alpha\mu u}{L^2}+\frac{2\mu E}{L^2}}}=d\theta$$

となる。よけいに複雑になっただけじゃないか、などと文句を言ってはいけない。
こうすると、単純に積分できるのだ。反対に、r,θ が絡み合った式では絶対に積分出来ない。
両辺積分すると、

右辺は $\int d\theta=\theta$ になる。積分定数を考えれば $=\theta-\theta_0$ とすべきだけと、角度の原点を θ_0 に取る。

左辺は、$\sqrt{\ }$ の中身は 平方完成（completing square）すれば、$\underbrace{-\left(u-\frac{\alpha\mu}{L^2}\right)^2}_{x^2}+\underbrace{\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4}+\frac{2\mu E}{L^2}}_{a^2}$ なので、

さらに変数変換 $u-\frac{\alpha\mu}{L^2}=u-u_0=x$ を行うと、$du=dx$ より、

左辺 $=\pm\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ となる。

この積分は $x=a\cos\phi$ と、もう一度変数変換すると、$dx=-a\sin\phi\ d\phi$ より、

$$=\pm\int\frac{-a\sin\phi\,d\phi}{\sqrt{a^2-a^2\cos^2\phi}}=\pm\int d\phi=\pm\phi$$

と簡単に実行出来てしまう。結局、ϕ の定義から、$\phi=\pm\arccos\frac{x}{a}$ だから、

右辺 : $\theta=\pm\arccos\frac{x}{a}$: 左辺

という簡単な結果を得る。

9-3 軌道の形を表す関数

単純に $\arccos$ をはらって、$\cos(\pm\theta)=\frac{x}{a}=\frac{u-u_0}{a}$ となるので、

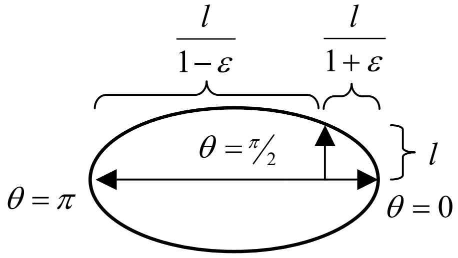
$$r=\frac{1}{u}=\frac{1}{u_0+a\cos\theta}=\frac{\overbrace{u_0^{-1}}^{\equiv l}}{1+\underbrace{au_0^{-1}}_{\equiv\varepsilon}\cos\theta}=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}$$ が求めたかった関数。

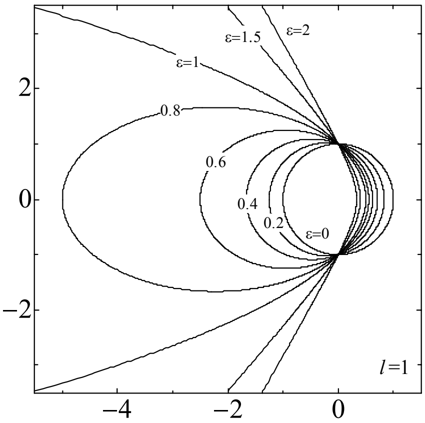
但し、$l=u_0^{-1}=\frac{L^2}{\alpha\mu}$ 及び $\varepsilon=au_0^{-1}=al=\frac{L^2}{\alpha\mu}\sqrt{\frac{\alpha^2\mu^2}{L^4}+\frac{2\mu E}{L^2}}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\alpha^2\mu}}$

この関数はどんな形を表すのかを見てみよう。
まず、
・$\varepsilon=0$ で、円（$r=l$）になる。　　;理由 ― これくらいは自分で考えよう。

・$1 > \varepsilon > 0$ では楕円になる（下左図）。 【重要】この条件は $E < 0$ だ。U_{eff} のグラフで意味を理解せよ。

$\theta \to \pm\theta$ に関して対称（下図で上下対称ということ）なので、





$\theta \to \theta + 2\pi$ で同じ半径に戻って来る

　　$\Rightarrow$ 軌道は閉じている。

大体の形はわかったので、もう少し定量的に調べよう。とりあえずグラフにして見る。

極座標 $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ にして、$r = \dfrac{l}{1+\varepsilon\cos\theta}$ を代入すると、θ による媒介変数表示になる。

【余談】閉じるのは重力ポテンシャル $-\alpha/r$ ともう一種類 αr^2 の場合のみ

$U = -\alpha/r^n$ で n が 1 からずれると、閉じなくなる。

相対論の効果など、他の効果が混じって来ても閉じなくなる ―― 「水星の近日点移動」

10 許される r の範囲

10-1 $E < 0$ の場合

エネルギー保存の式 $E = \underbrace{\dfrac{\mu}{2}\dot{r}^2}_{0} + \underbrace{\dfrac{L^2}{2\mu r^2} - \dfrac{\alpha}{r}}_{U_{\mathrm{eff}}(r)}$

を満たす $r_{\min} \sim r_{\max}$ の間で運動することがわかっているので、

$Er^2 + \alpha r - \dfrac{L^2}{2\mu} = 0$ を解けば、両端の r の値が求められる:

$$\therefore r_{\min,\max} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2EL^2/\mu}}{2E} = \frac{\alpha}{2E}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 2EL^2/\mu\alpha^2}\right) = \frac{\alpha}{2E}(-1 \pm \varepsilon) = \frac{\alpha}{2|E|}(1 \mp \varepsilon)$$

ここで分子分母に $1 \pm \varepsilon$ を乗ずると、

$$=\frac{\alpha}{2|E|}\frac{1-\varepsilon^2}{1\pm\varepsilon}=\frac{\alpha}{2|E|}\frac{\overbrace{-2EL^2/\mu\alpha^2}^{1-\varepsilon^2}}{1\pm\varepsilon}=\frac{\overbrace{L^2/\mu\alpha}^{l}}{1\pm\varepsilon}=\frac{l}{1\pm\varepsilon}\qquad (\because \frac{E}{|E|}=-1)$$

10-2 $E\geq 0$の場合、$\varepsilon\geq 1$となるので、$r_{\min}=\dfrac{l}{1+\varepsilon}$, $r_{\max}=\infty$ ⇒ 二度と戻って来ない！

11 周期

面積速度$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\dfrac{L}{2\mu}$なので、これを変数分離すると、

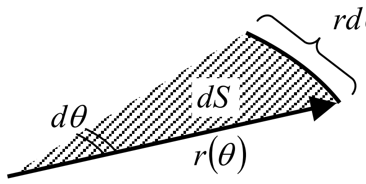
$$\frac{r^2d\theta}{2}=\frac{L}{2\mu}dt$$

となるので、一周期積分して、

$$\int_0^{2\pi}\frac{r^2d\theta}{2}=\frac{L}{2\mu}T$$

左辺は$=\int dS=S=\pi ab$

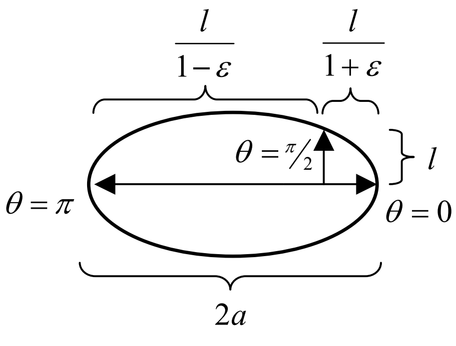
$$\therefore T=\frac{2\mu\pi ab}{L}$$



$$dS=\frac{1}{2}r\cdot rd\theta=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

注）上側の$r(\theta+d\theta)=r(\theta)+dr$と$r(\theta)$のずれは、$O(d\theta^2)$ なので無視できる。

12 ケプラーの第三法則



右枠の楕円の性質より、

$$T=\frac{2\mu\pi ab}{L}\propto ab=a^{3/2}$$

【楕円の性質】

〔長軸〕

$2a=r(0)+r(\pi)$であるから、

$r=l/(1+\varepsilon\cos\theta)$より、

$2a=r(0)+r(\pi)=l/(1+\varepsilon)+l/(1-\varepsilon)=2l/(1-\varepsilon^2)$

〔短軸〕

$b=y_{\max}$であるから、 $y=r\sin\theta$を微分して、

$dy/d\theta=dr/d\theta\cdot\sin\theta+r\cos\theta=0$を解いた$\theta$を代入して$y_{\max}$を求める。

$\therefore \dfrac{l\varepsilon\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}+\dfrac{l\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)}=0$で、分母を払って

$l\varepsilon\sin^2\theta+l(1+\varepsilon\cos\theta)\cos\theta=0$

$\therefore l\varepsilon+l\cos\theta=0$より、$\cos\theta=-\varepsilon$

よって、$b=r\sin\theta=\dfrac{l}{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}=\dfrac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

これを a の式に代入すれば、

$$b^2=al$$