運動量

1 運動量とは

（momentum）

定義 $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$、単に速度の定数倍？

・N 個の粒子が居れば和は $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\cdots\vec{p}_N$ ⇔ 速度の平均とは全然違う

$\vec{X}=\dfrac{m_1\vec{x}_1+\cdots+m_N\vec{x}_N}{m_1+\cdots+m_N}$ は重心の座標なので、

$\vec{P}=\underbrace{(m_1+m_2+\cdots+m_N)}_{M}\dot{\vec{X}}$ は重心の運動量になる。

○意味「運動の勢（いきお）い」— 質量が小さくとも速い ≒ 質量が大きくてゆっくり

【参考】

・相対論では、$\vec{p}=m\vec{\upsilon}\Big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ （$\upsilon\to c$ で発散）

・光は、$p=h\nu/c$（古典力学とは二倍異なる）

・量子力学では $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ ；$\left|\vec{k}\right|=2\pi/\lambda$、方向は波の進行方向

2 運動量の変化

ニュートンの運動方程式 $\vec{f}=\dot{\vec{p}}$ を時間で積分すると、

$$\underbrace{\underbrace{\vec{p}(t=t_2)-\vec{p}(t=t_1)}_{\Delta\vec{p}}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\,dt\xrightarrow{\text{一定の力なら}}\underbrace{\vec{f}\cdot(t_2-t_1)}_{\vec{f}\cdot\Delta t}}_{\text{運動量の変化＝力積}}$$

となるので、力が加わったときのみ変化。力が加わらなければ一定（慣性の法則）

3 運動量保存

3-1 単一粒子の場合＝力が働いていなければ運動量は保存

摩擦が無ければ、$\vec{f}=-\nabla U$ なので、ポテンシャルが平坦なら運動量保存

＝ 平行移動してもポテンシャルが不変

これを「空間が並進対称性（へいしんたいしょうせい）を持つ」と言う。

よって、ある方向に対してのみ平坦ならばその方向だけ運動量保存

例） 坂道を横切る方向は保存。上り下りする方向は保存しない。

3-2 複数粒子の場合＝外力が働いていなければ「全体としては」運動量保存

⇕

内力とは粒子同士で及ぼし合う力

⇒ 作用反作用の法則で内力は全て打ち消し合う

【衝突】この場合も作用反作用で、打ち消しあっている

★これを次章§4で詳しく説明する

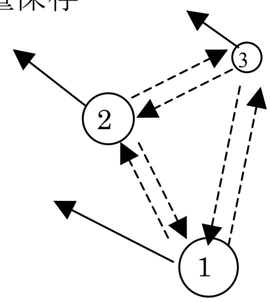


図１　内力と外力

3-3 運動量以外の保存量

エネルギー＝時間が一様な場合（昨日も今日も明日も同じ場合）

業界用語で言えば、運動方程式にあらわ(explicitely)に時間が含まれないということ。

角運動量＝回転対称の場合

○△×量＝系の<u>対称性</u>によってどういう量が保存するかが決まる

4 複数粒子における運動量保存

個別の粒子は、$\dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\vec{f}_i}_{外力} + \underbrace{\sum_j \vec{f}_{ij}}_{内力}$ に従って運動。和を取ると、

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{f}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}$$

注）$\vec{f}_{ii}$ は当然ゼロだ。

【注意】和の記号は、いちいち $i = 1 \sim n$ とか書かないことが多いので自分で判断する。

図1の場合 $\dfrac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3}_{運動量の和}\right) = \underbrace{\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3}_{外力} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}}_{内力=0}$

∵作用反作用の法則より、$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

ここで、全粒子の運動量の和の式をもう一度良く見る。質量の和を $M = \sum_i m_i$ とおけば

$$\sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{x}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{M}\sum_i m_i \vec{x}_i\right) = M \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}\right) = M\dot{\vec{R}}$$

となって、重心座標 $\vec{R} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$ の重さ $M = \sum_i m_i$ の一つの粒子の運動量と見なせる。

よって、重心の運動量$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i$の満たす運動方程式は、

$$\dot{\vec{P}}=\vec{F}$$

と簡単な形になる。但し、$\vec{F}$は外力の和。

5 坂道での運動量保存

前述の通り、坂道を登り降りする際は運動量保存はしない。落下でも同様。

水平に横切る場合(トラバース)は保存。

$U(\vec{x})=\begin{cases}0 & (y<0)\\ U_0 & (y>0)\end{cases}$というポテンシャルを考える。$U_0=mgh$ということだ(図2)。

【仮定】

・継ぎ目は滑らかになっていて、粒子は上ったり降りたり出来る。

・上りきったときにジャンプしない。

【わかること】

・x方向の運動量は保存

・y方向の運動量は保存しない

(坂があるから並進対称でない)

エネルギーは保存(摩擦なし)

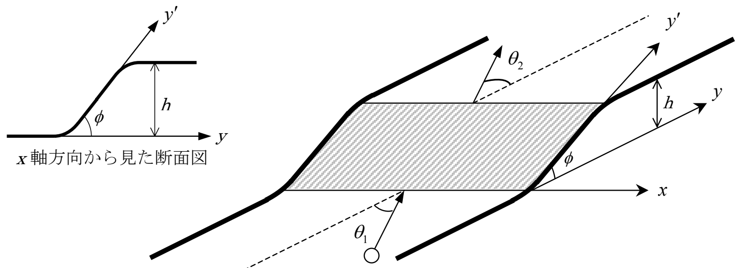


図２　坂を登り上がる質点の問題

6 解

運動量保存$p_{1x}=p_{2x}$

エネルギー保存$\frac{p_1^2}{2m}=\frac{p_2^2}{2m}+U_0$　但し、$p_1^2=p_{1x}^2+p_{1y}^2$, $p_2^2=p_{2x}^2+p_{2y}^2$

実は途中の坂なんかどうでも良い (もちろん、問われたら解かざるを得ないが、、、)。

ここで、入射角と屈折角は、

$$\sin\theta_1=\frac{p_{1x}}{p_1},\ \sin\theta_2=\frac{p_{2x}}{p_2}$$

であるので、両者の比を取って上の運動量保存の結果を代入すると、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{p_{1x}/p_1}{p_{2x}/p_2}=\frac{1/p_1}{1/p_2}=\frac{p_2}{p_1}$$

となる。さらに、エネルギー保存の方の式を、粒子のエネルギー $E=\dfrac{p_1^2}{2m}$ を使って、

$2mE = p_2^2 + 2mU_0$　と変形して代入すると、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\sqrt{2mE}}=\sqrt{1-U_0/E}$$ が得られる。

これは Snell の法則の粒子版（ランダウ「力学」東京図書、より）。

7 粒子の屈折

まず、$\sin\theta_2=\dfrac{\sin\theta_1}{\sqrt{1-U_0/E}}$ の関係をいろいろな $\dfrac{U_0}{E}$ の値に対してグラフにしたのが図3。θ_1 をゼロから徐々に増やして行くと、θ_2 は、急激に増え、θ_1 より先に 90 度に達する。これの意味を考えると、

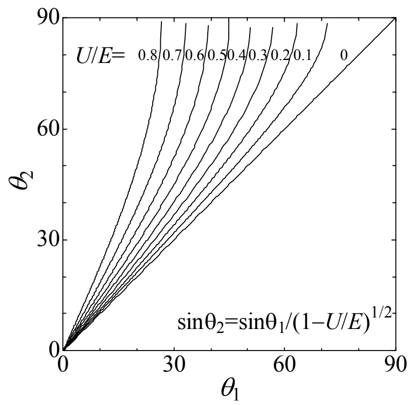


図３　入射角 θ_1 と出射角 θ_2 の関係

イ）$\theta_1=0$ では任意のポテンシャルで屈折しない（但し速度は変化。入射速度が足りないと坂を登りきらずに反射）

ロ）$\theta_1>0$ だと、$E>U_0$ であれば登りきるが、垂直方向の運動量のみが減少するので、方向が変化（＝屈折）。

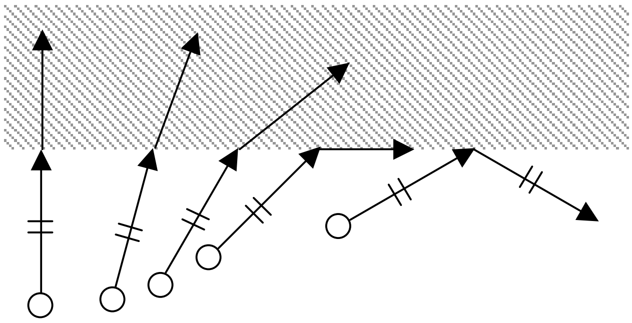


図 4 入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 の関係―2

ハ）さらに、θ_1 が大きいと、$\sin\theta_2=\dfrac{\sin\theta_1}{\sqrt{1-U_0/E}}$

はさらに大きくなり、先に $\sin\theta_2=1$, $\therefore\ \theta_2=\dfrac{\pi}{2}$ に達してしまう。

⇒上りきった所で垂直方向の運動量＝0

になるので、真横に進む

ニ）それ以上の $\theta_1>\theta_1^{\mathrm{c}}=\arcsin\sqrt{1-U_0/E}$

に対しては全反射。

このようすを図4に示す。

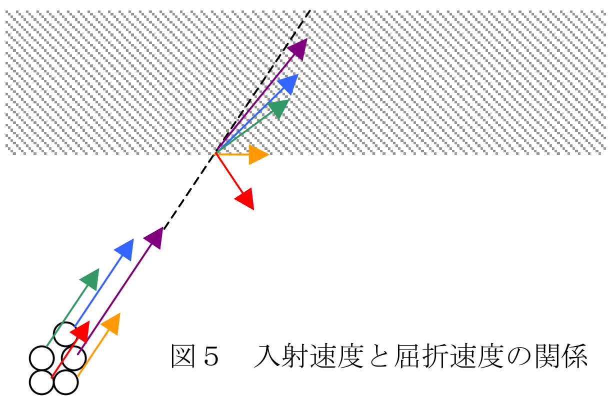


図５　入射速度と屈折速度の関係

8 入射粒子のエネルギーによる屈折角の変化

今度は入射粒子のエネルギー E が異なる場合を考える。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\sqrt{1-U_0/E}$$

より、屈折角が異なって来る（図5）。これは、色々な速さをもった粒子集団を入射角 θ_1 で打ち込むと、速さによって出て行く方向が異なることを示している。これは、垂直方向の運動量のみが減少するので、エネルギー保存則 $\dfrac{p_{1y}^2}{2m}=\dfrac{p_{2y}^2}{2m}+U_0$ より、

$$p_{1y}-p_{2y}=p_{1y}-\sqrt{p_{1y}^2-2mU_0}$$

となって、入射が高速（E 大）なほど、垂直方向運動量の減少は少なくなるからだ（図6）

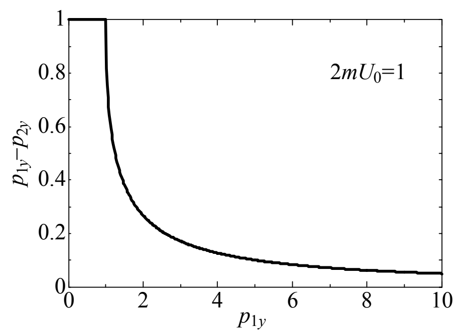
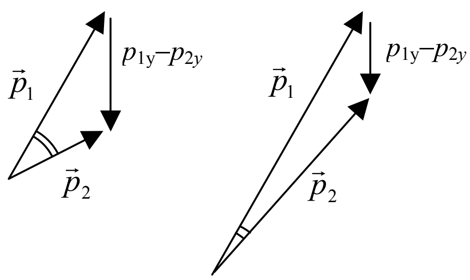


図 6 入射運動量の垂直成分 p_{1y} と減少分の関係



入射速度が大きいほど、角度変化は小さくなる。

さらに、どんどんエネルギーを小さくして行って、$E<U_0$ になると、坂を上り切らずに、全反射する。一旦、垂直方向の運動量は減少するが、坂を降りるときに再び増加するので、同じ速さで帰ってくる。

9「分光（ぶんこう）」？？

上の話は、色々な速さの粒子集団を入射すると、速さによって、方向が分けられることを意味している（図 5）。これは太陽の光（白色光）がプリズムで分光できることと大変良く似ている。

実際、Newton は光の粒子説で屈折を説明するために、今回説明したモデルを提唱した。

その後、干渉現象が発見され、やはり、波の方が良いと考えらた。

しかし、光電効果の発見によって、再び粒子説の重要性が認識され、結局、「粒子と波の二面性」があるとされて現在に至っている。ちなみに現在では光子一つ一つを検出できるセンサーさえある（光電子増倍管）。