

第3回 オイラー・ラグランジュ方程式(Euler-Lagrange equation)

3.1 ニュートンの運動方程式に変わるもの

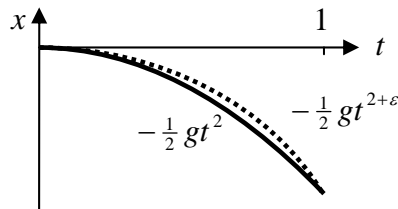
前回、ラグランジアン $L = \text{運動エネルギー} - \text{ポテンシャルエネルギー} = T - U$ という量を定義する

と、現実の運動 (= ニュートンの運動方程式に従う運動) に対する作用積分 $S = \int_0^t L dt$ が、

現実にはあり得ないインチキな運動に対する S に比べて必ず、小さくなるという「最小作用の原理」を、変分法を用いて証明しました。

例) 自由落下

現実の運動 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ インチキな運動 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^{2+\varepsilon}$ 但し ε は微少量



これは、

ニュートンの運動方程式 \Leftrightarrow 最小作用の原理 \Leftrightarrow 《本日の **Goal** 》

のように、両者が等価であることを示しています。

今回は、最小作用の原理を満たす L の性質を調べ、ニュートンの運動方程式にとって代わるような「方程式」を見つけます。

3.2 オイラーラグランジュの方程式

$S = \int_0^t L dt$ のままで変分を適用し、どんな L が S の極値を与えるか調べてみます。ここで、

$L = L(q, \dot{q})$ です。(簡単のため、一次元とします)

「どんな L 」かとは、どういう運動するか、すなわち、 $q(t)$ と $\dot{q}(t)$ が、どういう時間の関数かということなのです。

$$\text{例) 静止} \begin{cases} q(t) = q_0 \\ \dot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{自由落下} \begin{cases} q(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ \dot{q}(t) = v_0 - g t \end{cases}$$

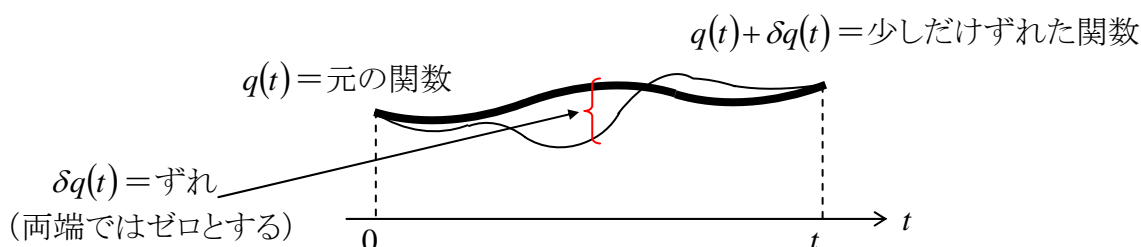
$$\text{回転} \begin{cases} q_x(t) = r \cos \omega t, q_y(t) = r \sin \omega t \\ \dot{q}_x(t) = -r \omega \sin \omega t, \dot{q}_y(t) = r \omega \cos \omega t \end{cases}$$

作用積分 S を変分してみます。 S の変分を取るとことは積分の中身のラグランジアン L をちよつとだけずらすことです。 L をずらすということはその中身の座標と速度をずらすということです。座標と速度は変数ですが、時間に依存するので「時間の関数」とみなせます。

この関数をずらすので変分になるわけです。

$$\delta S = \int_0^t \delta L dt = \int_0^t \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) dt$$

但し、始点と終点ではずれない、つまり、 $\delta q(0) = \delta q(t) = \delta \dot{q}(0) = \delta \dot{q}(t) = 0$ とします。



ここまで来ればあとは先週のレシピを思い出して、部分積分すれば、

$$\delta S = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t)}_{=0} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t) dt$$

第一項は、ずれ関数 $\delta q(t)$ の定義からゼロで、積分の中身は任意の $\delta q(t)$ 関数でゼロにならねばならないので、結局、

$$\text{最小作用の原理} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

ということになります。この方程式を Euler-Lagrange 方程式と言います。

一体全体どういう方程式かと言うと、たとえば、

ポテンシャル $U(q)$ の中に置かれた質点の場合、 $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q)$ ですから、

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} (m\dot{q}) = f - m\ddot{q} = 0$$

となってニュートンの運動方程式が出てきました。これは今日の前半で確かめたことです。

以上より本日の結論は、

ニュートンの運動方程式 \Leftrightarrow 最小作用の原理 \Leftrightarrow 《Euler-Lagrange 方程式》

ということになります。Euler-Lagrange 方程式は微分方程式なので、積分方程式の最小作用の原理に比べて取り扱いが簡単です(みなさんには同じに見えるかも知れませんが、一般的に微分方程式の方が解くのは遙かに易しいのです)。

3.3 極座標で $\vec{F} = m\vec{a}$ を書く

一年生の力学の復習ですが、デカルト座標で書くとあんなに美しかったニュートンの運動方程式が極座標ではどれだけ大変かを味わってみましょう。

$x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ より、

(I) \dot{x} と \dot{y} と \dot{z} の時間微分は、 $\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi$, etc.

$$\ddot{x} = \ddot{r} \sin \theta \cos \phi + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi$$

(II) 二回微分は、 $+\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi + r \ddot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \phi - r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi$
 $- \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi - \dot{r} \ddot{\phi} \sin \theta \sin \phi - r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \phi$

(III) r, θ, ϕ について逆に解く

(IV) U の微分を $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ から極座標の微分へと変数変換

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

このうち、第二項の係数 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ は $x \sin \phi = y \cos \phi$ を x で微分して、

$$\sin \phi + x \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = -y \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\therefore \sin \phi + (r \sin \theta \cos^2 \phi + r \sin \theta \sin^2 \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\text{よって、} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}$$

次に $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$ を x で微分して、

$$2x = 2z^2 \tan \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{x}{z^2} \Big/ \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{ここで、} \frac{x}{z^2} = \frac{\sin \theta \cos \phi}{r \cos^2 \theta} \text{であるから、}$$

$$\text{よって、} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}$$

最後に $x = r \sin \theta \cos \phi$ を x で微分して、

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \phi + \sin^2 \phi \quad (\text{前々の結果代入})$$

(前の結果を代入)

$$\text{よって、} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos^2 \phi (1 - \cos^2 \theta)}{\sin \theta \cos \phi} = \cos \phi \sin \theta$$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

x の偏微分だけで死にそうになります。

という膨大な計算が必要です。

3.4 ラグランジアンを使った極座標のニュートン運動方程式の導出

L を使えば、 $L=mv^2/2-U$ に前頁の一階微分の式(I)を代入するだけで、

$$L = \frac{m}{2} \left[\begin{array}{l} (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi)^2 \\ + (\dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi)^2 \\ + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)^2 \end{array} \right] - U(\vec{r})$$

$$= \frac{m}{2} \left[\begin{array}{l} \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \\ \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \end{array} \right] - U(\vec{r})$$

・上段は一行目と二行目の各項の自乗和と、一項目と二項目のクロスターム

(※一項目と三項目、二項目と三項目のクロスタームはキャンセル)

・下段は三行目をそのまま展開

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - U(\vec{r})$$

すると三変数それぞれについてのオイラーラグランジュ方程式
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \end{cases}$$

から、単純に偏微分して、

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - m\ddot{r} - \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

と、驚くべき簡単さで得られます。特に、ポテンシャルの微分 $\frac{\partial}{\partial \phi}$ や $\frac{\partial}{\partial \theta}$ を変数変換する必要

が全くないことに注意して下さい。

3.5 保存則

「ある量が一定値になる」という保存則が見つかり、微分方程式を解かなくとも、問題が簡単になります。今の場合、

U が中心力 $U = U(r)$ ならば、三番目の式から、

$$mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.} \text{ という保存則が得られます。これは角運動量保存則です。}$$

ラグランジアンに含まれない変数に着目すると、このように簡単に保存則が見つかります。

$$\text{※ある座標変数 } \phi \text{ が } L \text{ に含まれないと、} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \phi}}_{=0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \text{ となるので } \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const.} \text{ という保存}$$

則が得られることとなります。そこで一般的には、座標を選ぶことによって、ある変数が L に含まれないようにしてやると、保存則が見つかります。