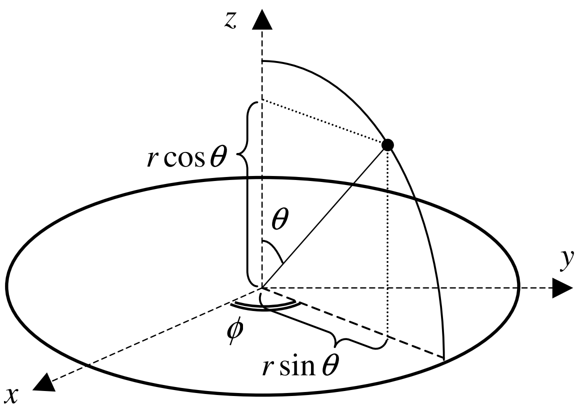
第2回講義の練習問題

極座標について。

1. 二次元極座標$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$で速度ベクトル$\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})$を計算して見ましょう。
   ヒント―$r\cos\theta$を時間で微分すると$\dot{x}$が求まります。rもθも時間の関数ですので、時間で微分すると$\dot{r}$や$\dot{\theta}$が出て来る事に注意しましょう。
2. 二次元極座標$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$で加速度ベクトル$\vec{a}=(\ddot{x},\ddot{y})$を計算して見ましょう。
   ヒント―二階微分ですので、例えば $\ddot{x}=\frac{d}{dt}\left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)$ のようになり、項の数が多くなるので間違えないようにしましょう。
3. 運動エネルギーを二次元の極座標で表して見ましょう。
   ヒント―$E=\frac{m|\vec{v}|^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$です。
4. ポテンシャルがゼロの場合のラグランジアンを二次元の極座標で表しましょう。
   ヒント―$U=0$なので$L=$運動エネルギーとなり、前問と同じ答えです、バキッ。
5. 角速度一定の円運動の場合は、$r=\text{const.}$かつ、$\dot{\theta}=\omega$となります（ωは定数）。この場合、加速度ベクトル$\vec{a}=(\ddot{x},\ddot{y})$が、昔習ったように、円の中心を向いていることを確かめましょう。ヒント―前問で求めた$\vec{a}$の式で、$r=\text{const.}$なのですから$\dot{r}=0$、そして、$\dot{\theta}=\omega$ですから、$\ddot{\theta}=0$を代入するだけです。

6. 三次元極座標$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$について、速度ベクトル$\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})$を計算して見ましょう。
   ヒント―変数が三つになって大変ですが、落ちついて頑張りましょう。三次元極座標を忘れた人は右図を見て思い出しましょう。



7. 同様に加速度ベクトルを計算しましょう。
   〔このうち、$\ddot{x}$の計算を第二回講義の最後でちょっとやって見たのです。大変ですよね。〕
8. 三次元極座標でラグランジアンを表しましょう。
   ヒント―加速度は必要ありません。速度ベクトルだけから計算できます。
9. 連結振り子（右図）のラグランジアンを書いてみましょう。
   （重さの無視できる棒の長さをl, L、質点の質量をm, Mとします。これらは全て、同一面内で運動しているとしますので二次元極座標の問題です）。
   ヒント―質量mの質点の座標を(x,y)、質量Mの質点の座標を(X,Y)として、それらを全て、変数α,βと定数M,m,L,lを使ってし、微分して速度を求めれば OK です。