第2回　最小作用の原理

1　安定な運動と、静止物体の釣り合いの問題

ニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ の解はいつでもユニーク(一つに決まる)であり、同じ初期条件であればいつでも必ず同じ運動をします。これは、その運動が『安定』であると言ってよいでしょう。

1.1 「安定な運動」

「安定な運動」の意味をもう少しはっきりさせるために、アナロジーとして物体の釣り合いを考えてみましょう。

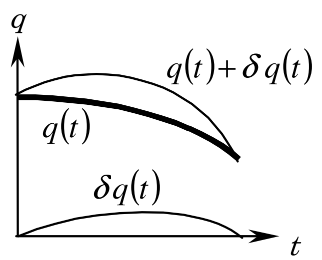
$$\boxed{\text{物体が安定な位置に停止する条件は、}\frac{\partial U}{\partial x} = 0\text{、かつ}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0}$$

3次元なら、$\nabla U = \vec{0}$、かつ $\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ の固有値が全て正という条件になります。

⇒いつでも、次元が変わったらどういう式になるか考えると面白いです。

運動の安定性という問題でも、何かポテンシャル U のような量が存在して、それが現実に起こる運動に対して極小値を取っているのではないでしょうか?

もちろん、これは何か法則があって述べているわけではありません。何となくそういう気がするのではないでしょうか、と言っているだけです。新しい理論はたいてい、そういうところから始まります。



現実の運動と少しずれた運動とは？

1.2 ラグランジアンと作用積分

運動の場合は、釣り合いとは異なり、ある有限時間の間持続するものですから、何かの関数を $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt$ のように時間で積分したものが極小になると考えて良いでしょう。

ここで t_1 と t_2 は運動の始点と終点であり、q と $\dot{q}$ は、座標とその時間微分です。平たく言えば、x と v ですね。いきなり、q とか書かれておじけづかないように。

⇒どうして q と書くのでしょうか。「デカルト座標」に限定しないからです。

あとで出てきます。（角度とか、曲線の長さ、*etc*.）

1.3　多自由度系（多次元、多粒子）

もちろん、これも、3 次元空間での運動であれば、$\vec{q}$ と $\dot{\vec{q}}$ のようにベクトルとなるでしょうし、もっと拡張して、多くの物体の運動であれば、もっと多くの座標$\{q_1, q_2, \ldots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\}$となります($N$ 個の粒子が三次元空間内を運動する場合は $6N$ 個の座標変数です)。

1.4　Lagrangian

$L = T - U$ と定義します。T は運動エネルギー、U はポテンシャルエネルギーです。

どうしてこんなものを定義するのかが今日の Goal です。

一次元空間を運動する一つの粒子なら、$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$　です。

三次元空間を運動する二つの粒子なら、$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right)$

ポテンシャルエネルギーの例、$U = -\vec{F}\cdot\vec{x}$

いつでも同じ力が働いている空間。$\vec{F} = (0,0,-mg)$とすれば重力

万有引力$U = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$　　$G = 6.67259\times10^{-11}\ \mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}$

バネ　$U = -\frac{k}{2}x^2$

このような自乗のポテンシャルを調和ポテンシャル(Harmonic)と呼びます。

由来はギリシャ哲学—この世は全て整数比の「調和」で成り立っている。振動数も。

1.5　作用積分 *action integral*

定義　$S=\int_0^t \frac{m\dot{q}^2}{2}-U(q)dt$

ベクトルで書けば　$S=\int_0^t \frac{m\left|\dot{\vec{q}}\right|^2}{2}-U(\vec{q})dt$

二次元なら、$\vec{q}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

三次元なら、$\vec{q}=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

多粒子なら、$S=\int_0^t \frac{m_1\left|\dot{\vec{q}}_1\right|^2+m_2\left|\dot{\vec{q}}_2\right|^2+\cdots}{2}-U(\vec{q}_1,\vec{q}_2,\cdots)dt$

1.6　最小作用の原理

作用積分の表式に「現実の運動」を代入してそれが最小になることを見てみよう。

現実の運動とは、、、

〔例〕等速直線運動 $q(t)=\upsilon_0 t+q_0$，$\dot{q}(t)=\upsilon_0$

〔例〕単振動 $q(t)=A\sin\omega t$，$\dot{q}(t)=A\omega\cos\omega t$

〔例〕等速円運動 $\vec{q}(t)=(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$，$\dot{\vec{q}}(t)=(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$

注）これからは単振動とは言わない。調和振動と言う。

バネとは言わずに調和ポテンシャルと言う。

「現実の運動」から少しずれた運動を考える。

$q(x)+\delta q(x)$ と $\dot{q}(x)+\delta\dot{q}(x)$　　ただし、δq は非常に小さな関数

1.7　作用積分

S に $q(x)+\delta q(x)$ を代入すると、

$$S(q+\delta q)=\int_0^t \frac{m(\dot{q}+\delta\dot{q})^2}{2}-U(q+\delta q)dt \approx \int_0^t \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2+2\dot{q}\delta\dot{q}\right)-U(q)-\frac{dU(q)}{dq}\delta q\,dt$$

一項目と三項目をまとめると元の S なので、

$$= S + \int_0^t \frac{m}{2}(\dot{q}\,\delta\dot{q}) - \frac{dU(q)}{dq}\delta q\,dt$$

ここで積分の中の第一項を部分積分して$\delta\dot{q}$を消去すると、

$$\int_0^t m\dot{q}\,\delta\,\dot{q}dt = m\dot{q}\,\delta\,q\Big|_0^t - \int_0^t m\ddot{q}\,\delta\,q\,dt = -\int_0^t m\ddot{q}\,\delta\,q\,dt$$

となるので結局、

$$S(q+\delta q) = S + \int_0^t - m\ddot{q}\delta q - \frac{dU(q)}{dq}\delta q\,dt = S - \int_0^t \left(m\ddot{q} + \frac{dU(q)}{dq} \right)\delta q\,dt$$

$$\therefore \delta S \equiv S(q+\delta q) - S = -\int_0^t \left(m\ddot{q} + \frac{dU(q)}{dq} \right)\delta q\,dt$$

を得ます。

1.8 ニュートンの運動方程式と最小作用の原理

$m\ddot{q} = F = -\dfrac{dU}{dq}(q)$がニュートンの運動方程式ですから、これを代入すると、

$$\therefore \delta S = 0 \quad \text{for } \forall \delta q(t)$$

となって、現実の運動から、ちょっとだけ外れた運動では必ずSは一定

つまり、極小値を取ると言うことがわかります。

すなわち、

$$\boxed{\text{ニュートンの運動方程式} \;\Leftrightarrow\; \text{最小作用の原理}}$$

が導かれました。

※厳密には、極大では無いことを証明するために、

$$S(q+\delta q) = S(q) + \frac{\partial S}{\partial q}(q)\delta q + \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}(q)\,\delta q^2$$

と二階変分を計算して、正であることを確かめる必要があります。

1.9 多次元・多粒子の場合

$$
\begin{aligned}
&S\left(q_1+\delta q_1,\, q_2+\delta q_2,\, q_1+\delta q_1,\cdots\right)\\
&\quad=\int_0^t \frac{m_1\left(\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1\right)^2+m_2\left(\dot{q}_2+\delta\dot{q}_2\right)^2+\cdots}{2}-U\left(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2,\cdots\right)dt
\end{aligned}
$$

$$
\approx S+\int_0^t m_1\dot{q}_1\delta\dot{q}_1+m_1\dot{q}_1\delta\dot{q}_1+\cdots-\frac{\partial U}{\partial q_1}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_1-\frac{\partial U}{\partial q_2}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_2-\cdots\ dt
$$

部分積分して、

$$
=S-\int_0^t m_1\ddot{q}_1\delta q_1+m_1\ddot{q}_1\delta q_1+\cdots+\frac{\partial U}{\partial q_1}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_1+\frac{\partial U}{\partial q_2}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_2+\cdots\ dt
$$

$$
=S-\int_0^t m_1\ddot{q}_1\delta q_1+\frac{\partial U}{\partial q_1}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_1+m_1\ddot{q}_1\delta q_1+\frac{\partial U}{\partial q_2}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\delta q_2+\cdots\ dt
$$

$$
=S-\int_0^t\left(m_1\ddot{q}_1+\frac{\partial U}{\partial q_1}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\right)\delta q_1+\left(m_1\ddot{q}_1+\frac{\partial U}{\partial q_2}\left(q_1,q_2,\cdots\right)\right)\delta q_2+\cdots\ dt
$$

それぞれの〔〕の中はニュートンの運動方程式から全てゼロになるので、

全ての座標 $q_1, q_2, \cdots$ について、S は極小値を取ることになります。

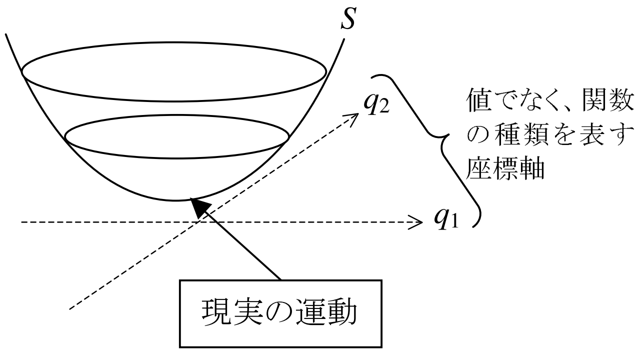
図示出来るのは二次元

（変数が二つという意味です）の場合

のみで、右図のようになっています。

但し、軸 q_1, q_2 は単なる座標ではなく、

現実の運動に対応した時間の関数です。



1.10 最小作用の原理の意味

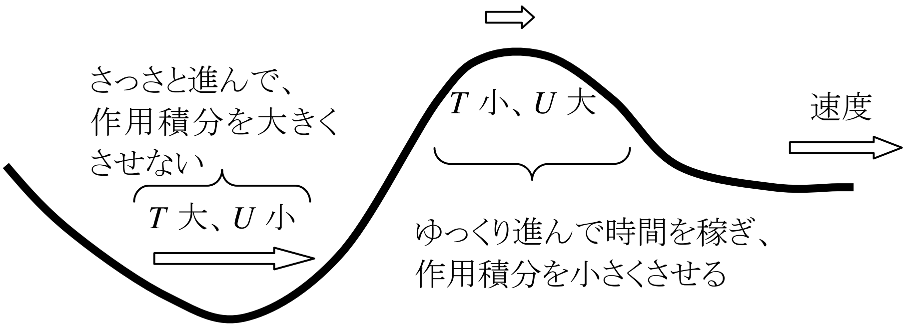
この運動がどうしてそんなに安定なのでしょうか？

どうしてこの宇宙では、ニュートン力学に従う運動が選ばれたのでしょうか？

それは作用積分を良く見るとすぐにわかります。まず、運動エネルギー T は常に正であることに注意すると、

$$S=\int_0^t \underbrace{T-U}_{L}\,dt$$

なのですから、積分を小さくするためには、$\boxed{T\text{ 小かつ }U\text{ 大}}$というところでゆっくり動けば良いことになります。このことは当たり前で、ポテンシャルの高いところでは運動エネルギーが小さくなってゆっくり進む、ということに他なりません。



Lの変数はqと$\dot{q}$であって、それ以外の変数は含まないという意味。

1.11 オイラーラグランジュの方程式

$S=\int_0^t Ldt$ のままで変分を適用してみます。ここで、$L=L(q,\dot{q})$です。

「どういう運動」かとは、$q(t)$と$\dot{q}(t)$が、どういう時間の関数かということです。

例）静止$\begin{cases} q(t)=q_0 \\ \dot{q}(t)=0 \end{cases}$　　自由落下$\begin{cases} q(t)=x_0+\upsilon_0-\frac{1}{2}gt^2 \\ \dot{q}(t)=\upsilon_0-gt \end{cases}$

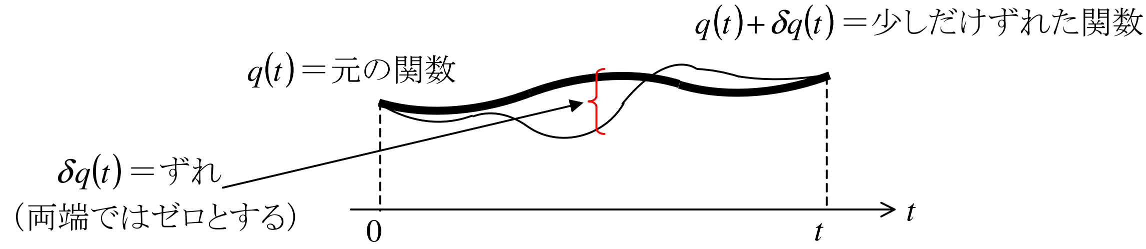
回転$\begin{cases} q_x(t)=r\cos\omega t,\ q_y(t)=r\sin\omega t \\ \dot{q}_x(t)=-r\omega\sin\omega t,\ \dot{q}_y(t)=r\omega\cos\omega t \end{cases}$

作用積分Sを変分してみます。Sの変分を取るということは積分の中身のラグランジアンLをちょっとだけずらすことです。Lをずらすということはその中身の座標と速度をずらすということです。座標と速度は変数ですが、時間に依存するので「時間の関数」とみなせます。

この関数をずらすので変分になるわけです。

$$\delta S=\int_0^t \delta L dt=\int_0^t \frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}(t)dt$$

但し、$\delta q(0)=\delta q(t)=\delta\dot{q}(0)=\delta\dot{q}(t)=0$としします。



ここまで来ればあとは先週のレシピを思い出して、部分積分すれば、

$$\delta S=\underbrace{\left.\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)\right|_0^t}_{=0}+\int_0^t\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta q(t)dt$$

第一項は、ずれ関数$\delta q(t)$の定義からゼロで、積分の中身は任意の$\delta q(t)$関数でゼロにならねばならないので、結局、

$$\text{最小作用の原理}\ \leftrightarrows\ \frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)=0$$

ということになります。この方程式を Euler-Lagrange 方程式と言います。

一体全体どういう方程式かと言うと、

例）ポテンシャル$U(q)$の中に置かれた質点の場合、$L=\dfrac{m\dot{q}^2}{2}-U(q)$ですから、

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)=-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{d}{dt}(m\dot{q})=f-m\ddot{q}=0$$

となってニュートンの運動方程式が出てきました。これは今日の前半で確かめたことです。

以上より本日の結論は、

最小作用の原理⇆ Newton の運動方程式⇆Euler-Lagrange 方程式

ということになります。E-L は微分方程式なので、積分方程式の最小作用の原理に比べて取り扱いが簡単です（みなさんには同じに見えるかも知れませんが、、、）。

※ 次回はラグランジアンのご利益。どうして便利なのか？