

## 第1回 最小作用の法則と変分法

これまで学習したニュートン力学  $\vec{F} = m\vec{a}$  を使えば、微分方程式 (= 数学) さえ出来れば全ての問題が解けます。三体問題以上は、解析解は存在しませんが、数値的に解くことが出来ます。すなわち、初期位置  $\vec{x}(0)$  と初期速度  $\vec{v}(0)$  さえ与えられれば、微小時間  $\delta t$  経過後の質点の運動は、

$$\begin{cases} \vec{v}(\delta t) = \vec{v}(0) + \vec{a}\delta t = \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}\delta t \\ \vec{x}(\delta t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)\delta t \end{cases}$$

微笑時間経過前の状態

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$  であり、座標の関数になっているので二つの式は絡みあっています。

のように求まってしまうのです。これを繰り返せば未来永劫の振る舞いがわかります。粒子が沢山ある場合は、

$$\begin{cases} \vec{v}_i(\delta t) = \vec{v}_i(0) + \vec{a}_i\delta t = \vec{v}_i(0) + \frac{\vec{F}_i}{m_i}\delta t \\ \vec{x}_i(\delta t) = \vec{x}_i(0) + \vec{v}_i(0)\delta t \end{cases} \quad \text{但し、}\vec{F}_i\text{は}i\text{番目の粒子に働く力}$$

と多変数の連立微分方程式になります。これはロボットでもスペースシャトルでも回転寿司でも全く同じに適用できます。しかし、適用できない場合が三つあります。

1. 粒子の数がとてつもなく多い場合
2. 粒子がとてつもなく小さい場合
3. 粒子の速度がとてつもなく速い場合

自分には関係ない話だと思われるかも知れませんが、そうでもありません。現代社会を支える、金属、半導体の中の電子は 1 と 2 にあてはまりますし、光通信やレーザーに登場する光子は 3 です。光を操作したり検知するデバイスを作るには 1-3 の全てが必要です。それから、未だに殆ど解明されていない現象の代表例として、摩擦があります。表面がつるつるしていれば良いかと言うとそうではなく、原子レベルで平坦な金属を貼り合わせると滑るところかぐつついて離れません。これを理解するのに 1 と 2 が必要です。エンジンやショックアブソ

一バを支える気体の性質も、これまで習ったのは頭ごなしに与えられた「ボイルシャルルの法則」だけで、どうして、温度を上げると比例して体積が増えるのかは知らないままです。

今現在、一般社会で注目されている新製品なるものはそのほとんどがアイデアが産みだされてからおよそ十年以上の年月が経ています。みなさんが大学院から社会に出て、訓練期間を経て自分のプロジェクトを持つようになるのに最低十年、そして新しいコンセプトの製品やデバイスを作りだすまでもう十年かかります。そうすると、みなさんが今勉強することは、20年後の世界を見据えたものでなければならないことになります。

この次世代へ向けた概念を理解するために学ばねばならないのは、

1. 統計力学
2. 量子力学
3. 相対論

の三つです。この講義では特に1と2を学ぶための準備＝新しい概念の導入を行います。たとえば、統計力学では「位相空間」の概念が必要ですし、量子力学ではハミルトニアンが必須です。

ちょうど、数学でベクトル空間の概念を学ぶことで世界が大きく広がったのと同じなのです。皆さんは既に、

和が定義出来るものなら何でもかんでもベクトルとみなしてベクトル空間を作って見る

という訓練を受けて、単なる実空間の矢印だったベクトルの応用範囲が果てしなく広がった感動を味わっていると思います。解析力学で導入された概念は、量子力学や統計力学で大いに役立つはずです。

例)  $x^n$  と言う関数( $n$ は0または正の整数とする)は、ベクトル空間を形成します。  
成分表示は、  
 $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots = (a, b, c, d, \dots)$   
のように定義します。内積を定義することもできます。

キーワード

1. 未定乗数法、変分法
2. 最小作用の原理、ラグランジアン
3. 保存量、力学的相似
4. ラグランジアンの応用—調和振動
5. 規準座標、多体問題
6. 非調和振動、摂動
7. ハミルトニアン、正準方程式
8. ハミルトニアンの例—電場と磁場中の荷電粒子の運動
9. 正準変換
10. リウビルの定理
11. 断熱不変量

参考書

ランダウ・リフシツ「力学」東京図書

一度は目を通そう。

高橋康「量子力学を学ぶための解析力学入門」講談社サイエンティフィク

書名の通り。

宮下精二「解析力学」裳華房

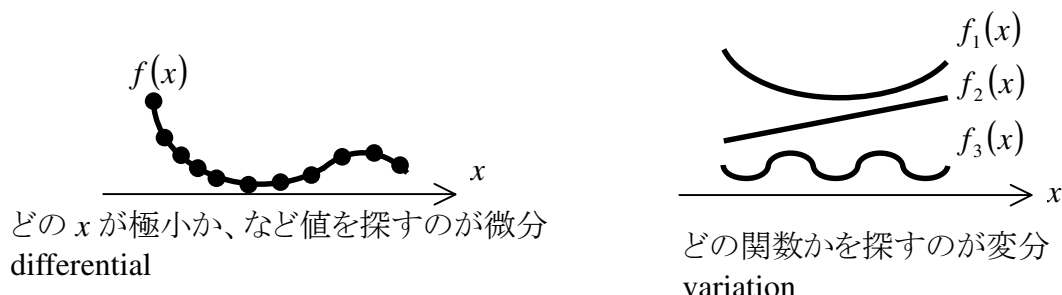
統計力学と量子力学に必要なポイントを抜き出してある。

評価

- ✓ 試験（出席、レポートも考慮。Moodleで提出）
- ✓ ノートをとる。試験の時に提出（後で返却）

# 1 変分法

1.1 これは微分法にとっても似たものですが、極値  $x$  を求めるのではなく、いわば「極関数」を求めます。計算方法自体は微分と全く同じです。



## 1.2 微分と変分

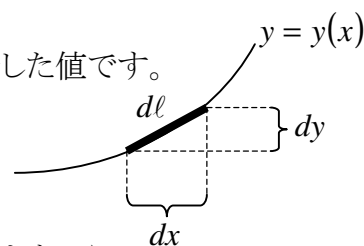
微分—変数の値をいろいろ変えて、関数が極値を取る  $x$  を探す

変分—関数の形  $f$  をいろいろ変えて、汎関数が極値を取る  $f$  を探す

汎関数とは「関数の関数」のことですが、大抵は関数を積分した値です。

### 1.3 [例] 二点間を結ぶ最短の曲線

まず、曲線の長さは  $l = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$  となりますから、



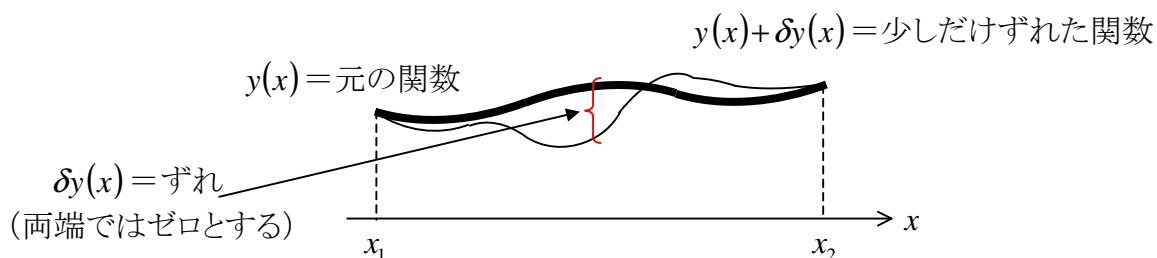
これが極小となる  $\delta l = 0$  という条件を調べれば良いわけです。

ここで、 $\delta l \equiv l[y(x) + \delta y(x)] - l[y(x)]$  を「変分」と呼びます。

見かけ上、定義は微分と全く同じですので、計算も同じです。

$\delta y(x)$  はとても小さな関数です。 小さなという意味は  $x$  の変域  $x_1 \sim x_2$  でいつでも小さいということです。それから、両端で  $\delta y(x)$  はゼロとします。

これは題意が「二点を結ぶ曲線」というのですから当然です。



## 1.4 変分の具体的な計算方法

まず代入して、微分と同じように計算します。部分積分を使うと、

$$\ell[y + \delta y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y' + \delta y')^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + 2y'\delta y'} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \sqrt{1 + \frac{2y'\delta y'}{1 + y'^2}} dx$$

ここで、Taylor 展開  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$  を使うと、

$$\approx \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \left( 1 + \frac{y'\delta y'}{1 + y'^2} \right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} + \frac{y'\delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} dx$$

となります。第一項は、ずらす前の  $\ell[y]$  そのものですから、結局、

$$\ell[y + \delta y] = \ell[\delta y] + \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'\delta y'}{\sqrt{1 + y'^2}} dx$$

を得ます。

さらに部分積分で  $\delta y'$  を消去すると、

$$\delta \ell = \ell[y + \delta y] - \ell[\delta y] = \frac{y' \cdot \delta y}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \delta y dx$$

となりますが、右辺第一項は、必ず零になります。(  $\because \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  だから。)

よって第二項が、任意の関数  $\delta y(x)$  についてゼロにならなければならなくなり、このため

には、どうしても積分の中身  $= \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)$  が、いつでも (= 恒等的に) 零にならねばな

りません。

このままではまだよくわかりませんが、積分して、 $\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$  を整理すれば、

$y'^2 = C^2(1 + y'^2)$  となり、結局、 $y' = \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} = \text{const.}$ , で、 $y = ax + b$  を得ます。

## 1.5 他の例

等周問題、という算数の問題から、懸垂曲線(カタナリー)、サイクロイド、弾性曲線、、、など、力学の問題から、カノニカル分布、波動関数など統計力学、量子力学まで幅広く使われます。工学から理学までいろいろなところで顔を出し、頼りになる手法です。

## 2 安定な運動と、静止物体の釣り合いの問題

ニュートンの運動方程式  $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$  の解はいつでもユニーク(一つに決まる)であり、同じ初期条件であればいつでも必ず同じ運動をします。これは、その運動が『安定』であると言ってよいでしょう。

### 2.1 「安定な運動」

「安定な運動」の意味をもう少しはっきりさせるために、アナロジーとして物体の釣り合いを考えてみましょう。

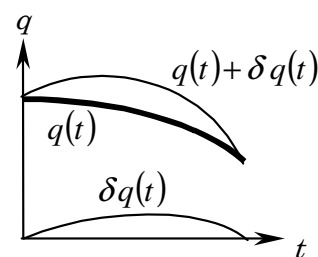
物体が安定な位置に停止する条件は、 $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ 、かつ  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$

3次元なら、 $\nabla U = \vec{0}$ 、かつ  $\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right]$  の固有値が全て正という条件になります。

⇒いつでも、次元が変わったらどういう式になるか考えると面白いです。

運動の安定性という問題でも、何かポテンシャル  $U$  のような量が存在して、それが現実にかかる運動に対して極小値を取っているのではないのでしょうか？

もちろん、これは何か法則があって述べているわけではありません。何となくそういう気がするのではないのでしょうか、と言っているだけです。新しい理論はたいてい、そう



現実の運動と少しずれた運動とは？

いうところから始まります。

## 2.2 ラグランジアンと作用積分

運動の場合は、釣り合いとは異なり、ある有限時間の間持続するものですから、何かの

関数を  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$  のように時間で積分したものが極小になると考えて良いでしょう。

ここで  $t_1$  と  $t_2$  は運動の始点と終点であり、 $q$  と  $\dot{q}$  は、座標とその時間微分です。平たく言

えば、 $x$  と  $v$  ですね。いきなり、 $q$  とか書かれておじけづかないように。

⇒どうして  $q$  と書くのでしょうか。「デカルト座標」に限定しないからです。

あとで出てきます。(角度とか、曲線の長さ、*etc.*)

## 2.3 多自由度系(多次元、多粒子)

もちろん、これも、3次元空間での運動であれば、 $\vec{q}$  と  $\dot{\vec{q}}$  のようにベクトルとなるでしょうし、

もっと拡張して、多くの物体の運動であれば、もっと多くの座標  $\{q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots\}$  とな

ります( $N$  個の粒子が三次元空間内を運動する場合は  $6N$  個の座標変数です)。

## 2.4 Lagrangian

$L = T - U$  と定義します。 $T$  は運動エネルギー、 $U$  はポテンシャルエネルギーです。

一次元空間を運動する一つの粒子なら、 $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$  です。

三次元空間を運動する二つの粒子なら、 $T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$

ポテンシャルエネルギーの例、 $U = -\vec{F} \cdot \vec{x}$

いつでも同じ力が働いている空間。 $\vec{F} = (0, 0, -mg)$  とすれば重力

万有引力  $U = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$        $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$

バネ  $U = -\frac{k}{2} x^2$

このような自乗のポテンシャルを調和ポテンシャル(Harmonic)と呼びます。

由来はギリシャ哲学—この世は全て整数比の「調和」で成り立っている。振動数も。

## 2.5 作用積分 *action integral*

定義  $S = \int_0^t \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) dt$

ベクトルで書けば  $S = \int_0^t \frac{m|\dot{\vec{q}}|^2}{2} - U(\vec{q}) dt$

二次元なら、 $\vec{q} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

三次元なら、 $\vec{q} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$

多粒子なら、 $S = \int_0^t \frac{m_1|\dot{\vec{q}}_1|^2 + m_2|\dot{\vec{q}}_2|^2 + \dots}{2} - U(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots) dt$

## 2.6 最小作用の原理

作用積分の表式に「現実の運動」を代入してそれが最小になることを見てみよう。

現実の運動とは、、、

[例] 等速直線運動  $q(t) = v_0 t + q_0$ ,  $\dot{q}(t) = v_0$

[例] 単振動  $q(t) = A \sin \omega t$ ,  $\dot{q}(t) = A \omega \cos \omega t$

[例] 等速円運動  $\vec{q}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ ,  $\dot{\vec{q}}(t) = (-r \omega \sin \omega t, r \omega \cos \omega t)$

注) これからは単振動とは言わない。調和振動と言う。

バネとは言わずに調和ポテンシャルと言う。

「現実の運動」から少しずれた運動を考える。

$q(x) + \delta q(x)$  と  $\dot{q}(x) + \delta \dot{q}(x)$       ただし、 $\delta q$  は非常に小さな関数

## 2.7 作用積分

$S$  に  $q(x) + \delta q(x)$  を代入すると、



$$S(q+\delta q) = \int_0^t \frac{m(\dot{q}+\delta\dot{q})^2}{2} - U(q+\delta q) dt \approx \int_0^t \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + 2\dot{q}\delta\dot{q}) - U(q) - \frac{dU(q)}{dq} \delta q dt$$

一項目と三項目をまとめると元の  $S$  なので、

$$= S + \int_0^t \frac{m}{2} (\dot{q}\delta\dot{q}) - \frac{dU(q)}{dq} \delta q dt$$

ここで積分の中の第一項を部分積分して  $\delta\dot{q}$  を消去すると、

$$\int_0^t m\dot{q}\delta\dot{q} dt = m\dot{q}\delta q \Big|_0^t - \int_0^t m\ddot{q}\delta q dt = -\int_0^t m\ddot{q}\delta q dt$$

となるので結局、

$$S(q+\delta q) = S + \int_0^t -m\ddot{q}\delta q - \frac{dU(q)}{dq} \delta q dt = S - \int_0^t \left( m\ddot{q} + \frac{dU(q)}{dq} \right) \delta q dt$$

$$\therefore \delta S \equiv S(q+\delta q) - S = -\int_0^t \left( m\ddot{q} + \frac{dU(q)}{dq} \right) \delta q dt$$

を得ます。

## 2.8 ニュートンの運動方程式と最小作用の原理

$m\ddot{q} = F = -\frac{dU}{dq}(q)$  がニュートンの運動方程式ですから、これを代入すると、

$$\therefore \delta S = 0 \quad \text{for } \forall \delta q(t)$$

となって、現実の運動から、ちよつとだけ外れた運動では必ず  $S$  は一定

つまり、極小値を取ると言うことがわかります。

すなわち、

ニュートンの運動方程式 $\Leftrightarrow$ 最小作用の原理
---------------------------------------

が導かれました。

※厳密には、極大では無いことを証明するために、

$$S(q+\delta q) = S(q) + \frac{\partial S}{\partial q}(q)\delta q + \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}(q)\delta q^2$$

と二階変分を計算して、正であることを確かめる必要があります。

## 2.9 多次元・多粒子の場合

$$\begin{aligned}
 & S(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_1 + \delta q_1, \dots) \\
 &= \int_0^t \frac{m_1(\dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1)^2 + m_2(\dot{q}_2 + \delta \dot{q}_2)^2 + \dots}{2} - U(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots) dt \\
 &\approx S + \int_0^t m_1 \dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 + m_1 \dot{q}_1 \delta \dot{q}_1 + \dots - \frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2, \dots) \delta q_1 - \frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, q_2, \dots) \delta q_2 - \dots dt
 \end{aligned}$$

部分積分して、

$$\begin{aligned}
 &= S - \int_0^t m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 + m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2, \dots) \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, q_2, \dots) \delta q_2 + \dots dt \\
 &= S - \int_0^t m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2, \dots) \delta q_1 + m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, q_2, \dots) \delta q_2 + \dots dt \\
 &= S - \int_0^t \left( m_1 \ddot{q}_1 + \frac{\partial U}{\partial q_1}(q_1, q_2, \dots) \right) \delta q_1 + \left( m_1 \ddot{q}_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}(q_1, q_2, \dots) \right) \delta q_2 + \dots dt
 \end{aligned}$$

それぞれの[]の中はニュートンの運動方程式から全てゼロになるので、

全ての座標  $q_1, q_2, \dots$  について、 $S$  は極小値を取ることになります。

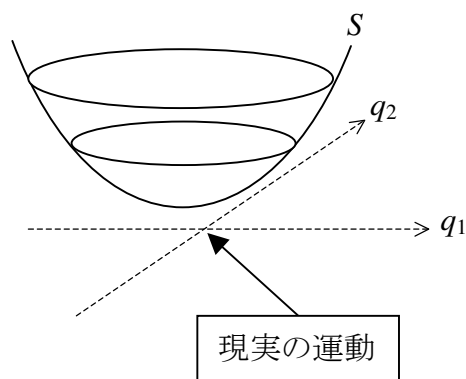
図示出来るのは二次元

(変数が二つという意味です)の場合

のみで、右図のようになっています。

但し、軸  $q_1, q_2$  は単なる座標ではなく、

現実の運動に対応した時間の関数です。



## 2.10 最小作用の原理の意味

この運動がどうしてそんなに安定なのでしょう？

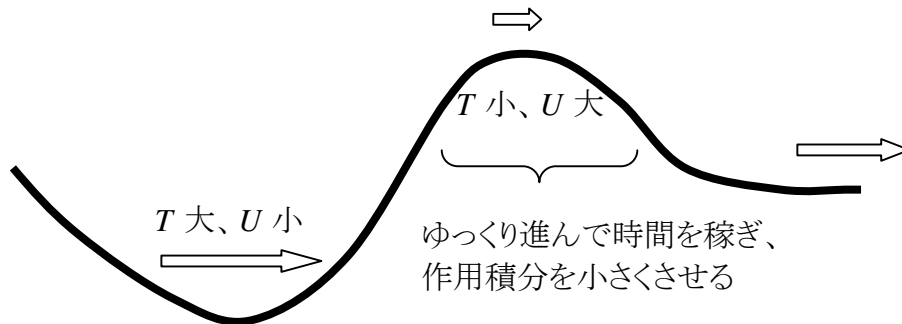
どうしてこの宇宙では、ニュートン力学に従う運動が選ばれたのでしょうか？

それは作用積分を良く見るとすぐにわかります。まず、運動エネルギー  $T$  は常に正であ

ることに注意すると、

$$S = \int_0^t T - U dt$$

なので、積分を小さくするためには、**T 小かつ U 大** というところでゆっくり動けば良いことになります。このことは当たり前で、ポテンシャルの高いところでは運動エネルギーが小さくなってゆっくり進む、ということに他なりません。



※ 次回はラグランジアンのご利益。どうして便利なのか？

### 3 未定乗数法

#### 3.1 束縛条件があるときの関数の極値の求め方

$g(x, y, z, \dots) = 0$  の束縛条件下で、 $f(x, y, z, \dots)$  を極小(極大)にするには、

新しい関数  $F(x, y, z, \dots, p) \equiv f(x, y, z, \dots) + p \cdot g(x, y, z, \dots)$  を、

新しい変数  $(x, y, z, \dots, p)$  について極小(極大)にすれば良い

というレシピです。

もし、束縛条件が二つあるならば、変数  $p$  を二つに  $p, q, \dots$  と増やして、

新しい関数  $F(x, y, z, \dots, p, q) \equiv f + p \cdot g + q \cdot h$  を、

新しい変数  $(x, y, z, \dots, p, q)$  についての極地を求めればよいのです。

#### 3.2 束縛条件 $g(\bar{x}) = 0$ の意味

まず、 $g(\bar{x}) = 0$  という条件は一般に「多次元空間空間」での曲面を指定しています。

✓ 空間が二次元(平面)ならば曲線、例)  $x + y - 2 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4 = 0$

✓ 3次元なら曲面、例)  $x + y + z - 1 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

✓ 四次元以上は超曲面というらしいです。

#### 3.3 イメージをつかむための具体例

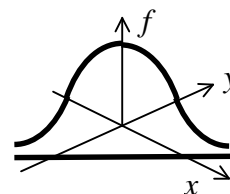
二次元平面上  $(x, y)$  で、束縛条件  $y = x + 1$  を指定して、関数  $\exp(-\alpha(x^2 + y^2))$  を最大にする点を探して見ましょう。

まず、束縛条件は  $g(x, y) \equiv y - x - 1 = 0$ 、関数は  $f(x, y) = e^{-\alpha(x^2 + y^2)}$  と書けます。

ラグランジュの方法に素直に従えば、新しいパラメタ  $z$  を導入して

$F(x, y, z) = e^{-\alpha(x^2 + y^2)} + z \cdot (y - x - 1)$  を無条件に最小にすればよく、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2\alpha x e^{-\alpha(x^2 + y^2)} - z, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2\alpha y e^{-\alpha(x^2 + y^2)} + z, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y - x - 1$$



$$\therefore \alpha(x+y)e^{-\alpha(x^2+y^2)} = 0 \quad (1 \text{ 項と } 2 \text{ 項の和より})$$

ですから、 $y - (-y) - 1 = 2y - 1 = 0$ 、すなわち、 $y = 1/2, x = -1/2$  を得ます。

### 3.4 どうしてこんな方法を使うのか

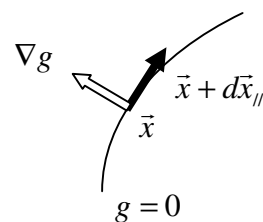
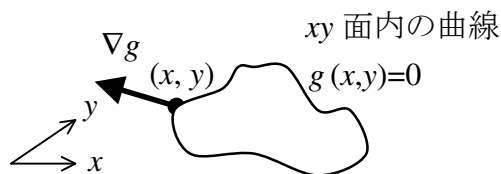
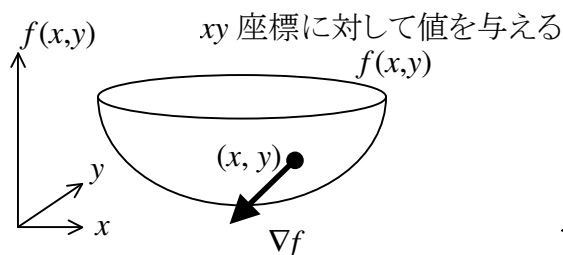
数学の得意な人は、なんだつまらん方法だ。そんなことをしなくとも、、、と思われたこと  
 でしょう。束縛条件が「簡単」な場合には、直接束縛条件の方程式を解いて、いくつか  
 の変数を消去して一変数問題に持ち込めばよいのですから。しかし、もし、束縛条件が  
 複雑だったらどうでしょうか。たとえば、5 次方程式だったら？ 未定定数法はそんな場合  
 でも使えるのです。

### 3.5 どうしてこの方法で束縛条件を取り込めるか

厳密な証明は数学の本を読んで貰うこととして、物理屋の直感に訴えかける説明をする  
 ことにします。 $F$  を無条件に最大にする際に、偏微分を使いましたが、これは

$$\begin{cases} \nabla F = \nabla(f + \lambda g) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = g = 0 \end{cases}$$

ということですから、一番目の条件は、何か二つのベクトルが平行になる条件ですね。



なお、二番目の条件、 $\lambda$  についての微分は、 $g=0$  と束縛条件そのものの式となります。

ここで物理的に関数  $f$  をポテンシャルだと思えば、 $\nabla f$  は力の働く方向です。

それに対し、曲線  $g=0$  の方の  $\nabla g$  は曲線の法線となります(下図)。

### 3.6 なぜ $\nabla g$ が法線になるか(念のため)

$\bar{x}$  は面上の点です。ですから、 $g(\bar{x})=0$  です。

曲線上を動く微小なベクトル  $d\bar{x}_{//}$  を考えます(右図)。

// の添字は  $dx$  が任意ではなく曲面に平行なものに限定されることを示しています。

すると、右図で  $\bar{x}$  も  $\bar{x} + d\bar{x}_{//}$  も大体曲面上に乗っています。

面に大体乗っているということは  $g(\bar{x} + d\bar{x}_{//}) \approx 0$  です。

ここで「大体」の意味は  $d\bar{x}_{//}$  が小さい極限では 0 だということです。

$d\bar{x}_{//}$  が小さいのですから早速テイラー展開して、

$$g(\bar{x} + d\bar{x}_{//}) \approx \underbrace{g(\bar{x})}_0 + \nabla g(\bar{x}) \cdot d\bar{x}_{//} + \dots = 0 \text{ となって、初項は当然ゼロですから、}$$

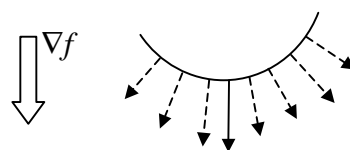
ここで問題にするのは第二項もゼロだということです。

$d\bar{x}_{//}$  は面上のベクトルで、それと直交するというのですから確かに  $\nabla g$  は法線です。

### 3.7 力の働く方向が、束縛曲線の法線と一致した時、なにが起きるか

一匹のサルが束縛曲線  $g(\bar{x})=0$  につかまりながら、ポテンシャル空間  $f(\bar{x})$  内をずると滑って行く様子を想像してみましょう。サルは、力の働く方向  $-\nabla f(\bar{x})$  が、曲線の接線に垂直(すなわち、法線  $\nabla g(\bar{x})$  と平行)となった所で止まりますよね。  $-\nabla f(\bar{x})$  がどちらかに傾いていれば、必ずそちらへ動きます。

うまい説明だと思うのですが、。。



(注) ジェットコースターは三次元空間内の“曲線”なので、束縛条件が二つ必要。

$$F(\vec{r}, \lambda, \mu) = U(\vec{r}) + \lambda f(\vec{r}) + \mu g(\vec{r}) \text{ を微分して、} \nabla U + \lambda \nabla f + \mu \nabla g = 0$$

#### 4 懸垂曲線

自明な例ではつまらないでしょうから他にもやります。

懸垂曲線とは柔らかいひもを二点間につりさげた場合の曲線  $p(x)$  のことです。昔は証明なしで名前だけ高校の教科書に出ていました。要するに  $\cosh$  です。ひもですから、長さが一定値  $L$  の条件下で、位置エネルギーを最小にします。つまり、

$$L = \int_0^L ds \text{ の条件でかつ } E = \int_0^L p(x(s)) ds \text{ を最小にする、ということです。}$$

ただしここで、 $ds = dx\sqrt{1+p'(x)^2}$  はひもの微小長さです。

##### 4.1 変分法と未定乗数法を組み合わせる

この場合は、単純な変分法だけでは解けません。なぜなら、「長さ一定」という束縛条件が付くからです。こんな場合に先ほどのラグランジェの未定乗数決定法を使います。

束縛条件はひもの長さ  $L = \int_0^L ds$  です。与えられた長さを  $L_0$  とします。

最小にするのは、エネルギー  $E = \int_0^L p(x(s)) ds$  です。

$$ds = dx\sqrt{1+p'(x)^2} \text{ ですから、} L = \int_0^x \sqrt{1+p'(x)^2} dx, \quad E = \int_0^x p(x)\sqrt{1+p'(x)^2} dx$$

となります。

よって、新しい汎関数  $F(p, \lambda) = E + \lambda(L_0 - L(p))$  を最小することになります

念のため) 引数関数そのものである関数を「汎関数」と言います。

$p$  が  $\sin x$  だったり  $x^2$  だったりするわけです

$$\delta F = \delta \int_0^x p(x)\sqrt{1+p'(x)^2} dx - \lambda \delta \int_0^x \sqrt{1+p'(x)^2} dx = \delta \int_0^x (p - \lambda)\sqrt{1+p'^2} dx$$

$$= \int_0^x \delta p \sqrt{1+p'^2} + (p-\lambda) \delta \sqrt{1+p'^2} dx$$

$$= \int_0^x \delta p \sqrt{1+p'^2} + \delta p' (p-\lambda) p' (1+p'^2)^{-1/2} dx$$

第二項目を部分積分して  $\delta p'$  を消してやると、

$$\text{部分積分: } \int_0^{x_0} \delta p'(\dots) dx = \underbrace{\delta p \cdot (\dots)}_0 \Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} \delta p'(\dots)' dx$$

$$= \int_0^x \delta p \left\{ \sqrt{1+p'^2} - p'^2 (1+p'^2)^{-1/2} - (p-\lambda) p'' (1+p'^2)^{-1/2} + (p-\lambda) p'^2 p'' (1+p'^2)^{-3/2} \right\}$$

$$= \int_0^x \delta p \left\{ (1+p'^2)^2 - p'^2 (1+p'^2) - (p-\lambda) p'' (1+p'^2) + (p-\lambda) p'^2 p'' \right\} (1+p'^2)^{-3/2}$$

第1, 2項 と、第3, 4項をそれぞれまとめて、、、

$$= \int_0^x \delta p \left\{ (1+p'^2) - (p-\lambda) p'' \right\} (1+p'^2)^{-3/2}$$

少し疲れてきましたが、結局、分子 =  $1+p'^2 - (p-\lambda)p''$  となり、

これが0にならねばなりません。この解は  $\cosh$  です。

#### 4.2 解を代入して確める

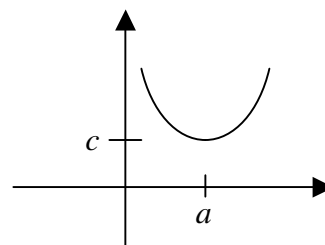
実際、 $p = b \cdot \cosh((x-a)/b) + c$  とおけば、

$$p' = \sinh((x-a)/b), \quad p'' = \cosh((x-a)/b)/b$$

となりますから、ちょっとした計算の結果、

$$1 - pp'' - \lambda p'' + p'^2 = 1 - \cosh^2 + c/b \cdot \cosh + \lambda/b \cdot \cosh + \sinh^2 = (c + \lambda)/b \cdot \cosh$$

を得ます。これは、定数  $\lambda = -c$  ととればゼロです。



#### 4.3 普通に解く(別解)

$$1 + p'^2 = (p + \lambda)p'' \text{ より、} \frac{1}{(p + \lambda)} = \frac{p''}{1 + p'^2} \text{ で、両辺に } p' \text{ を乗じて } \frac{p'}{(p + \lambda)} = \frac{p'p''}{1 + p'^2}$$

と積分できる形になった。

#### 5 もうひとつの変分の例



質点が最速ですべり落ちる「サイクロイド曲線」を導きます。

関数を  $-f(x)$  として、 $x=0 \sim x_0$  まで滑るとする。エネルギー保存則から、

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgf(x) \text{ です。}$$

$$\text{初速度ゼロとすると } E=0 = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \underbrace{mgf(0)}_0 \text{ なので、 } 0 = \frac{m\dot{x}^2}{2} (1+f'^2) - mgf(x)$$

また、速度  $\vec{v}$  は曲線に沿ってのものなのでその絶対値は、

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + f'^2 \dot{x}^2} = \dot{x} \sqrt{1+f'^2} \text{ となります。}$$

よってエネルギー保存則は  $\dot{x}^2(1+f'^2) = 2gf(x)$  と変形されます。

### 5.1 最小の所要時間を求める

所要時間を求めるのですから、強制的に  $\frac{dt}{dx} = \dots$  の形にして  $dx$  で積分します

$$\text{時間は } \dot{x} \text{ にだけ入っているので、 } \therefore \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gf(x)}{1+f'(x)^2}}$$

逆数を取って積分すると、 $x=0 \sim x_0$  まで移動する所要時間  $T$  が

$$T = \int_0^{x_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1+f'^2}{f}} dx \text{ と求まります。}$$

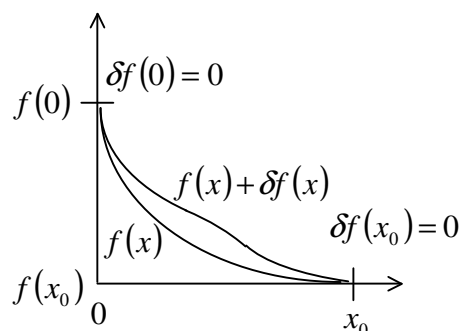
この  $T[f]$  が、どういう曲線  $f$  によって極小になるか調べれば良いのです。

### 5.2 $T$ の変分を取る

$$T[f + \delta f] - T[f] = \delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f}{1+f'^2}} \frac{2ff'\delta f' - (1+f'^2)\delta f}{f^2} = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx \frac{2f'\delta f'}{\sqrt{f(1+f'^2)}} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^3}} \delta f$$

となります。



5.3 部分積分で  $\delta f'$  を消す

与式には  $\delta f$  と  $\delta f'$  が入っています。

変数を一つにして、 $\forall \delta f$  に対して、 $\int_0^{x_0} dx \cdot G[f] \delta f = 0$  という形に持って行きたいので、

第一項を部分積分して  $\delta f'$  を消します。

$$\begin{aligned} \text{第一項} &= 0 - \frac{-2}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx \frac{f'' \sqrt{f(1+f'^2)} - \frac{f'(f' + f'^3 + 2ff'f'')}{2\sqrt{f(1+f'^2)}}}{f(1+f'^2)} \delta f \\ &= -\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} dx \frac{f'' f(1+f'^2) - f'(f' + f'^3 + 2ff'f'')/2}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f \\ &= -\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} dx \frac{f'' f + ff'^2 f'' - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{1}{2} f'^4 - ff'^2 f''}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f \\ &= -\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} dx \frac{f'' f - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{1}{2} f'^4}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f \quad \text{--- (I)} \end{aligned}$$

$$\text{第二項(そのまま転記)} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx - \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^3}} \delta f$$

分母と係数を第一項と揃えて、

$$= \frac{2}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} dx - \frac{\frac{1}{2}(1+f'^2)^2}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f = -\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} dx \frac{\frac{1}{2} + f'^2 + \frac{1}{2} f'^4}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f \quad \text{--- (II)}$$

$$\text{以上の二つ(I), (II)をたし合わせると、} \delta T = -\sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{x_0} dx \frac{f'' f + \frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2}}{(f(1+f'^2))^{3/2}} \delta f$$

任意の微小な関数  $\delta f(x)$  について、 $\delta T = 0$  というのが変分原理ですから、

$$f'' f + \frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} = 0 \text{ を得ます。}$$

これで変分は終わりです。

## 5.4 二階微分方程式を解く

二階微分方程式に決まった解き方はありません(一階微分方程式にはあるのです! )。

まず、 $[f'$ だけの項] $f'' + [f$ だけの項] $f' = 0$ のように出来ないか考えます。

もし出来たら積分できる(たまたまです)からです。

そこでまず、 $f'' f + \frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{2} = 0$ を

$$f \text{ で割って、} 2f'' + \frac{f'^2 + 1}{f} = 0$$

$$f'^2 + 1 \text{ で割って、} \frac{2}{f'^2 + 1} \cdot f'' + \frac{1}{f} = 0$$

となりますが、これで第一項は OK だけれど、第二項に  $f'$  が足りません。

そこで全体に  $f'$  をかけてやれば、

$$\frac{2f'}{f'^2 + 1} \cdot f'' + \frac{f'}{f} = 0$$

となって目的通りの式になります。これを不定積分すれば、

$$\int \frac{2f'}{f'^2 + 1} f'' dx + \int \frac{f'}{f} dx = C \quad \text{となりますが、} f' dx = df \text{ や、} f'' dx = df' \text{ に注意すれば、}$$

$$\int \frac{2f' df'}{f'^2 + 1} + \int \frac{df}{f} = C \text{ を得ます。}$$

さらに  $2f' df' = d(f'^2) \equiv dg$  などを思い出せば、 $\int \frac{dg}{g+1} + \int \frac{df}{f} = C$  となり、

これは積分可能なので、積分してしまって、

$$\log(g+1) + \log(f) = \log((f'^2 + 1) \cdot f) = C$$

対数を外して、

$f'^2 + 1 = \frac{C_1}{f}$ ; 但し、 $C_1 \equiv e^C$  と置きました。単なる書き換えです。

$$\therefore f' = \sqrt{\frac{C_1 - f}{f}}$$

これは一階微分方程式なので「必ず」解けます。

### 5.5 一回微分方程式を解く

$\frac{1}{f'} \equiv \frac{dx}{df} = \dots$  の形にして、無理やり  $f$  で積分するのです。

つまり、 $\frac{dx}{df} = \sqrt{\frac{f}{C_1 - f}}$  を、 $f$  で積分して、 $x = \int df \sqrt{\frac{f}{C_1 - f}}$  です。

これで解けました。というか、物理では、「これで微分方程式が解けた」と言います。

積分できるかどうかは別問題なのです。

この場合、幸運なことに積分も簡単に実行できます。

### 5.6 積分を実行

変数変換で  $\theta$  という変数を導入して、 $f = \frac{1}{2}C_1(1 + \cos \theta)$  — (A)

あとは代入すれば、

倍角の公式  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$  などを駆使して、

積分変数変換因子  $df/d\theta$  を忘れないようにすれば、

$$\begin{aligned} x &= \int df \sqrt{\frac{\frac{1}{2}C_1(1 + \cos \theta)}{\frac{1}{2}C_1(1 - \cos \theta)}} = \int \frac{df}{d\theta} d\theta \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \int \left( -\frac{C_1}{2} \sin \theta \right) \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} d\theta \\ &= -\frac{C_1}{2} \int \sin \theta \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta = -\frac{C_1}{2} \int \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta = -C_1 \int \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -C_1 \int \frac{1 + \cos \theta}{2} d\theta = -\frac{C_1}{2} (\theta + \sin \theta) + B \quad ; \text{但し } B \text{ は積分定数。 — (B)} \end{aligned}$$

見映えを良くするために  $A \equiv -\frac{C_1}{2}$  と置けば(A), (B)をまとめて書いて、

$$\begin{cases} x = A(\sin \theta + \theta) + B \\ f(x) = -A(\cos \theta + 1) \end{cases}$$

を得ます。これはサイクロイド曲線の媒介変数表示です。変数  $x$  の方に、 $\sin \theta$ と、裸の  $\theta$  が両方入っているのがポイントで、これで、

「廻る分」と、「転がって平行移動する分」を表します。

