

全ての問題において途中の計算も記して下さい。

1. 正準変換

ハミルトニアン $H = \frac{2}{m}(p^2 - 2\sqrt{3}xp + 3x^2)$ を正準変換 $\begin{cases} X = x \cos \theta + p \sin \theta \\ P = -x \sin \theta + p \cos \theta \end{cases}$ (但し θ は定数) に

よって変換し、 θ を上手く取ると、実は極めて良く知られた運動と等価であることを示そう。

2. 荷電粒子に対するラグランジアンとハミルトニアン

静電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン $H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi(\vec{x})$ について、磁場 $(0, 0, B_0)$ 、

電場 $(E_0, 0, 0)$ の場合の式を書いてみよう。次に対応するラグランジアンを定義式

$L(\vec{x}, \vec{v}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - H(\vec{x}, \vec{p})$ から計算してみよう。さらにオイラー・ラグランジュの式から運動方

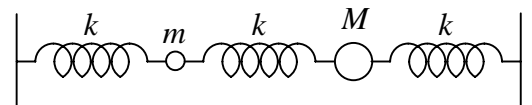
程式も導出してみよう。注意) ラグランジアンは p を含んではいけない。

3. 基準振動

二つの質点が右図のように両側の壁とバネで繋がれ、一次元調和振動をしているとする。

この系のラグランジアンを書き下し、次に運動方程式を導き、基準振動数を求めよう。

さらに、 $m = M$ の場合について基準座標も求めよう。



4. 位相空間

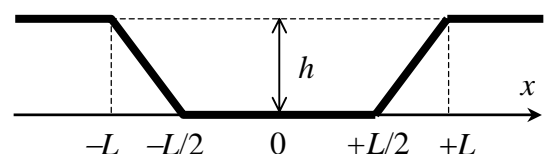
図に示すようなポテンシャル中を一次元運動する質量 m の質点について、まず、ハミルトニ

アンを書き下そう (ヒント x の範囲について場合分けが必要だ)。

次に位相空間における (x, p) の軌跡を描こう。質点のエネルギー E (運動エネルギーとポテンシ

ヤルエネルギーの和) が $E < mgh$, $E = mgh$, $E > mgh$

の各場合について何本か描いて見よう。



【解答】

$$1) \phi = \frac{\pi}{3} \text{ と置けば、} \begin{cases} X = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}p}{2} \\ P = \frac{-\sqrt{3}x}{2} + \frac{p}{2} \end{cases} \text{ なので、} H = \frac{2}{m} (p^2 - 2\sqrt{3}xp + 3x^2) = \frac{2}{m} \cdot 4P^2 = \frac{P^2}{2(m/16)}$$

となり、これは自由な質点と等価。

$$2) \vec{A} = B_0(-y/2, x/2, 0), \phi = -E_0x \text{ と置くと } H = \frac{1}{2m} \left(p^2 - eB_0(-p_x y + p_y x) + (eB_0)^2 \frac{x^2 + y^2}{4} \right) - eE_0x$$

ラグランジアンへの変換は与えられた定義式に $\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$ を代入して、

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = (m\vec{v} + e\vec{A}) \cdot \vec{v} - \frac{1}{2m} (m\vec{v})^2 - e\phi = \frac{1}{2} m v^2 + e\vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi \text{ となる。}$$

具体的に与えられた静電磁場の場合は、 $L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{eB_0}{2} (-y v_x + x v_y) + eE_0x$

$$\text{オイラーラグランジュの式に代入すると運動方程式は} \begin{cases} \frac{eB_0 v_y}{2} + eE_0 - m \dot{v}_x = 0 \\ -\frac{eB_0 v_x}{2} - m \dot{v}_y = 0 \end{cases}$$

$$3) \text{ 各質点の位置ずれを } x, y \text{ とすると } L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k (x - y)^2 - \frac{1}{2} k y^2$$

$$\text{E.-L. 方程式} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - k(x - y) - m \ddot{x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = +k(x - y) - ky - M \ddot{y} = 0 \end{cases} \text{ より、} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ -\beta & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ 但し } \begin{cases} \alpha = k/m \\ \beta = k/M \end{cases}$$

対角化して $(2\alpha - \lambda)(2\beta - \lambda) - \alpha\beta = 0$ より $\lambda^2 - 2(\alpha + \beta)\lambda + 3\alpha\beta = 0$ なので、

$$\therefore \lambda = (\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta}$$

新しい座標系では、 $\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ なので、基準振動数は、 $\omega_{\pm} = \sqrt{\lambda_{\pm}}$

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ と置くと、 $2\alpha A - \alpha B = \lambda_{\pm} A$, $\therefore B = \frac{1}{\alpha} \left((\alpha - \beta) \mp \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta} \right) A$

$\alpha = \beta$ と置けば、 $\therefore B = \frac{1}{\alpha} (\mp \alpha) A = \mp A$ なので、 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (規格化はしなくとも可)

$$4) H = \frac{p^2}{2m} + mgU(x) = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + mgh & (L < |x|) \\ \frac{p^2}{2m} + mgh \left(\frac{2|x|}{L} - 1 \right) & (L/2 < |x| < L) \\ \frac{p^2}{2m} & (|x| < L/2) \end{cases}$$

より、穴の底と外側では $E=H$ の軌跡は水平線になる。

穴の中の右斜面上では $x = \frac{L}{2} \left(\frac{E - p^2/2m}{mgh} + 1 \right)$ なので、横向きの放物線で頂点は $\left(\frac{L}{2} \left(\frac{E}{mgh} + 1 \right), 0 \right)$

$E = 0$ では底面のどこかで静止 ($E \rightarrow +0$ の極限では水平線)

$E < mgh$ では斜面の途中まで上る往復運動

$E = mgh$ では斜面のちょうど上まで登り切って停止

$E > mgh$ では斜面を登り切って、減速して外へ出て行く

