2001 年度解析力学期末試験(前期)略解

1. ラグランジュの未定乗数法

A) $g(x,y,z)\equiv x+2y+3z-1=0$ で表わされる平面上での $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ の極値。

$F(x,y,z,l)=f(x,y,z)+lg(x,y,z)$ の極値を求めればよい。よって $F_x=2x+l=0$，$F_y=2y+2l$，$F_z=2z+3l=0$ より、$(x,y,z)=(-l/2)\cdot(1,2,3)$ である。これを $F_l=g=0$ に代入して、$(-l/2)\cdot 14=1$，$\therefore l=-1/7$，よって、$(x,y,z)=(1/14,\ 2/14,\ 3/14,\ )$

B) f をポテンシャルとみなしたときの力 $-\nabla f$ と、平面 $g=0$ の法線ベクトル ∇g が平行になっていることを示す。$-\nabla f\propto -(x,y,z)\propto(1,\ 2,\ 3)$，一方、$\nabla g=(1,\ 2,\ 3)$ より明らか。

2. ラグランジアンと微分方程式の一般解

A) 固有振動数 w_0 と同じ振動数の外力が加わった調和振動子のラグランジアン
仮想ポテンシャルを $-x\cdot f\cos w_0 t$ と置くと、$L=mu^2/2-mw_0^2x^2/2-(-xf\cos w_0 t)$
$\partial L/\partial x-d(\partial L/\partial \dot{x})/dt=-mw_0^2x+f\cos w_0 t-m\ddot{x}=0$
B) 一般解を求める。
外力＝０ の場合の一般解は、$x_G=A\cos(w_0 t+a)$ であり、外力が有る場合の特解は指示に従って、$x_S=t\cdot g\cdot\sin w_0 t$ と置いてみると、$\ddot{x}_S+w_0^2x_S=2gw_0\cos w_0 t$ であり、これが $=f\cos w_0 t$ と一致するのであるから、$g=f/2w_0$ と求まる。以上より、$x=x_G+x_S=A\cos(w_0 t+a)+(t\,f/2w_0)\sin w_0 t$

3. ハミルトニアンと正準変換

A) ハミルトニアン $H=p^2/2+x^2/2-px+a\cdot(x+p)/\sqrt{2}$ から L を求める。
$\dot{x}=\partial H/\partial p=p-x+a/\sqrt{2}$ を $L=p\dot{x}-H=p\dot{x}-(p-x)^2/2-a\cdot(p+x)/\sqrt{2}$ に代入して、
$L=-(\dot{x}-a/\sqrt{2})^2/2-a\cdot(\dot{x}+2x-a/\sqrt{2})/\sqrt{2}+(\dot{x}+x-a/\sqrt{2})\dot{x}$，以下計算略
B) $q=p/4$ とすれば、変換は $X=\cos q\cdot x+\sin q\cdot p=(x+p)/\sqrt{2}$，$P=\cos q\cdot p-\sin q\cdot x=(p-x)/\sqrt{2}$ となるので、単純に代入すれば $H=P^2+aX$ なので、これは一様重力場中の運動と等価($a=mg$)。

4. 位相空間における軌跡の速度

振動数 w_0 の一次元調和振動子の位相空間における軌跡の進む速さ $ds/dt\equiv\sqrt{dx^2+dp^2}/dt$
まず、調和振動子の解 $x(t)=A\sin w_0 t$ 及び $u(t)=Aw_0\cos w_0 t$ より、$E=mA^2w_0^2/2$，$\therefore A=\sqrt{2E/m}/w_0$
これらを使って速度を求める。まず、$dx=dt\cdot Aw_0\cos w_0 t$，$dp=-dt\cdot mAw_0^2\sin w_0 t$
$\therefore ds/dt=\sqrt{A^2w_0^2\cos^2 w_0 t+m^2A^2w_0^4\sin^2 w_0 t}=\sqrt{(2E/m)\cos^2 w_0 t+2Emw_0^2\sin^2 w_0 t}$
$=\sqrt{2E/m}\cdot\sqrt{\cos^2 w_0 t+(mw_0)^2\sin^2 w_0 t}$
となり、確かに一定ではない。
統計力学では、エネルギー $E\sim E+dE$ の範囲に囲まれた領域の面積速度が一定である(等重率の原理)として、アボガドロ数個程度の粒子集団の振る舞いを学ぶ予定。