2001 年度解析力学期末試験　　　　　　　　　　2001/07/27(Fri), 11:00-12:35, 3-248

1. ラグランジュの未定乗数法

A) $g(x,y,z) \equiv x+2y+3z-1=0$ で表わされる平面上での $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ の極値を求めよ。

ヒント— $F(x,y,z,l)=f(x,y,z)+lg(x,y,z)$ の極値を求めればよい。

B) 上で極値を取る (x,y,z) について、f をポテンシャルとみなしたときの力 $-\nabla f$ と、平面 $g=0$ の法線ベクトル ∇g が平行になっていることを示せ。

2. ラグランジアンと微分方程式の一般解

A) 固有振動数 w_0 と同じ振動数の外力が加わった調和振動子のラグランジアンを求め、オイラーラグランジュの微分方程式に代入して運動方程式を導け。ヒント—外力 $f \cdot \cos w_0 t$ に対する仮想ポテンシャルは $-x \cdot f \cos w_0 t$ とすればよい。

B) 上の運動方程式 $m\ddot{x}+mw_0^2 x = f \cdot \cos w_0 t$ の一般解を求めよ(注：特解だけでなく一般解を求めよ)。

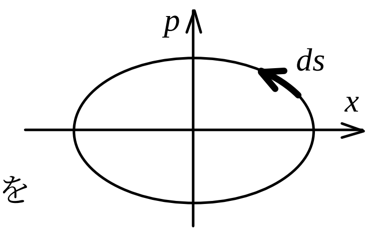
ヒント—特解 x_S は、$x_S = t \cdot g \cdot \sin w_0 t$ とおいて代入して、解となるように定数 g を定めれば良い。

3. ハミルトニアンと正準変換

A) ハミルトニアン $H = p^2/2 + x^2/2 - px + a \cdot (x+p)/\sqrt{2}$ から、定義 $L = p\dot{x} - H$ によってラグランジアンを求めよ。 (注意：変換式を使って求めたラグランジアンの中の変数 p は、必ず $\dot{x} = \partial H/\partial p$ を使って消去すること。)

B) 上のハミルトニアンを正準変換 $X = \cos q \cdot x + \sin q \cdot p,\ P = \cos q \cdot p - \sin q \cdot x$ によって変換せよ。但し、q をうまい値にとるとハミルトニアンは非常に簡単な形になるので、そのうまい値を求めてから変換せよ。そしてどのような運動と等価であるかを述べよ (q, a は定数)。

4. 位相空間



振動数 w_0 の一次元調和振動子の位相空間における軌跡について考える。全エネルギーを E とした場合の軌跡の速さ $ds/dt \equiv \sqrt{dx^2+dp^2}/dt$ を計算せよ。なお、結果は時間に対して等速ではない。

ヒント—調和振動子の解 $x(t)=A\sin(w_0 t+f)$ から、$p(t)$ を求め、全ネルギーが E になるよう A を決める。

次に、dx 及び dp を計算し、ds/dt の式に代入すればよい。

(なお、エネルギー $E \sim E+dE$ の範囲に囲まれた領域の面積速度は一定であり、これを等重率の原理と云う。来年習う統計力学では、この原理の元に 10^{23} 個程度の粒子集団の振る舞いを学ぶ予定。)

＊感想等ありましたらどうぞ。