名前〔　　　　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　　　〕

問１．質量m の質点が中心力場$U=-\alpha/r$ （但しαは正の定数）で二次元平面内を運動するとき、ラグランジアンL を極座標(r,θ)で書き、オイラーラグランジュ方程式を求め、保存量を求めよ。

$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r)=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+\alpha/r$より、$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-U'(r)=mr\dot{\theta}^2-\alpha/r^2$, 及び $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$　保存量は$mr^2\dot{\theta}$

問2．前問で一般化運動量(2つ)を求め、ハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。

$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$、　$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$より、

$H=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=m\dot{r}^2+mr^2\dot{\theta}^2-\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U(r)=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+U(r)=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-\alpha/r$

正準方程式は、$\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}$、　$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=-\left(-\frac{p_\theta^2}{mr^3}\right)-U'(r)=\frac{p_\theta^2}{mr^3}-\alpha/r^2$、　$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$、　$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=0$

問３．水平な線上を原点から一定速度vで一次元運動する質量mの質点について、時刻$t=0\sim1$についての作用積分Sを求めよ。次に速さが$2vt$である場合について作用積分を求め、大小を比較し、議論せよ。但しaは正の定数である。

前者の座標は$x=vt$, 後者は$x=vt^2$

$S=\int_0^1 dt\,L=\int_0^1 dt\frac{m}{2}\dot{x}^2=\int_0^1 dt\frac{m}{2}(nat^{n-1})^2=\left[\frac{mn^2a^2}{2(2n-1)}t^{2n-1}\right]_0^1=\frac{mn^2a^2}{2(2n-1)}(1-0)=\frac{ma^2}{2}\frac{n^2}{2n-1}$ これは、確かに、$n=1$の方が小さい。これは最小作用の原理に対応していて、現実の運動（$n=1$）の作用積分が最小であることによる。

問４．空間反転によって不変なもの、不変にならないものの例をあげて説明せよ。

不変なもの、角運動量

不変でないもの、座標、速度、ねじ

π中間子が崩壊して発生するμ粒子の、運動量と自転角運動量（スピン）の関係は、一種のねじ（ヘリシティ）とみなすことが出来るため、空間反転によって不変ではなく別のものになり、エネルギー的に不安定で、そういう崩壊は現実には起こらない。これをパリティ対称性の破れ、と呼ぶ。なお、電荷まで反転させたものはエネルギー的に等価で現実に起こる。

問５．カップの中の水分子の運動を考えよう。但し、分子は球状とし、数はN個とし、ハミルトニアンはHとする。時刻$t=0$ における位相空間内の点を$(x_1^0,x_2^0,\dots x_N^0,p_1^0,p_2^0,\dots p_N^0)$とし、また、初期エネルギーを$E$とする（$E$は定数）。この点の微小時刻$\delta t$後の位置と運動量を求めよ。また、軌跡の描く曲線の性質について説明せよ。

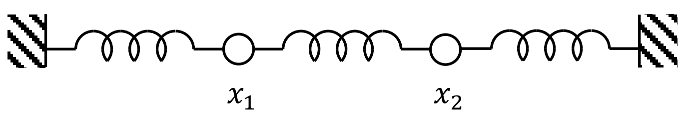
$x_i(\delta t)=x_i^0+\dot{x}_i(0)\delta t=x_i^0+\frac{\partial H}{\partial p_i}(0)\delta t$, $p_i(\delta t)=p_i^0+\dot{p}_i(0)\delta t=p_i^0-\frac{\partial H}{\partial x_i}(0)\delta t$　のように変化して行く。

軌跡は常にエネルギーの初期値Eを満たすような曲線であり、宇宙の寿命を超えるような長時間後には交わってループとなる。

問６．図のように質量mの二つの質点がバネ定数kの三つのバネで壁と繋がれている。ハミルトニアンHを書いて正準方程式を求めよ。但し二つの質点のつり合い位置からのずれの座標をそれぞれx_1及びx_2、運動量をそれぞれp_1及びp_2とする。

次にこのハミルトニアンをラグランジアンL に変換せよ。そして、座標変換 $X=½(x_1+x_2)$及び$Y=(x_1-x_2)$を行って解け。

最後に、X,Yについて解いた結果から、x_1及びx_2がどのような運動をするかを示せ。



≪裏面に解答せよ≫

［裏面］$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{k}{2}x_1^2+\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{k}{2}x_2^2$

運動量と速度変数との関係は$\dot{x}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m},\dot{x}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{m}$　であるので、

$L=\dot{x}_1p_1+\dot{x}_2p_2-H=\frac{p_1^2}{m}+\frac{p_2^2}{m}-H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}-\frac{k}{2}x_1^2-\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2-\frac{k}{2}x_2^2=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}-\frac{k}{2}x_1^2-\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2-\frac{k}{2}x_2^2$

与えられた座標変換式より、$x_1=X+½Y$及び$x_2=X-½Y$であるから、

$L=\frac{m(\dot{X}+½\dot{Y})^2}{2}+\frac{m(\dot{X}-½\dot{Y})^2}{2}-\frac{k}{2}(X+½Y)^2-\frac{k}{2}Y^2-\frac{k}{2}(X-½Y)^2=m\dot{X}^2+¼m\dot{Y}^2-kX^2-\frac{3k}{4}Y^2$

$=\frac{(2m)}{2}\dot{X}^2-\frac{(2k)}{2}X^2+\frac{½m}{2}\dot{Y}^2-\frac{(3/2)k}{2}Y^2$ と、独立な二つの調和振動子と見做すことが出来る。固有振動数は$\omega_0=\sqrt{k/m}$, $\sqrt{3}\sqrt{k/m}$

どのような運動かと言うと、前者Xは、一緒に動く（○→○→）いわば、重心の振動。後者Yは、逆向きに動く（←○　○→）いわば二つの質点の距離の振動。

元々の、それぞれの質点の運動は、$x_1=A\cos(\omega_0t+\alpha)+½B\cos\left(\sqrt{3}\omega_0t+\beta\right),x_1=A\cos(\omega_0t+\alpha)-½B\cos\left(\sqrt{3}\omega_0t+\beta\right)$

但し、A,B,α,βは積分定数（任意定数のこと）