名前〔　　　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　　〕

問１．質量m の質点が中心力場$U = ½k(x^2+y^2)$ で二次元平面内を運動するとき、ラグランジアンL をデカルト座標(x,y)で書き、オイラーラグランジュ方程式を求めよ。また、方程式の形から、どのような運動か説明せよ。

問2.　前問で一般化運動量(2つ)を求め、ハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。

問３．問１で Lを極座標(r,θ)で書き直し、オイラーラグランジュ方程式を求めよ。また、方程式の形からどのような運動か説明せよ。

問４．前問（問３）で、一般化運動量（２つ）を求め、ハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。また、保存量があればそれを指摘せよ。

問５．母関数$W(q,Q) = \frac{qQ}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(q^2+Q^2)$ が与えられたときの正準変換を、$Q=\cdots, P=\cdots$ の形で求めよ。ヒント）$p=\frac{\partial W}{\partial q}, P=-\frac{\partial W}{\partial Q}$である。
また、この正準変換を用いて$\mathcal{H}=\left(p+\sqrt{3}q\right)^2$を簡単にせよ。

問６．等速直線運動する質点の運動について、位相空間内の点を(x,p)とする。この点とわずかに異なる$(x,p+\Delta p)$，$(x+\Delta x,p)$，$(x+\Delta x,p+\Delta p)$の四つの点からなる長方形を考える。この長方形の面積が時間とともにどのように変化するか説明せよ。

問７．講義で印象に残った事項について説明せよ（感想を書いても良いが採点しない)。

名前〔　　　　　　　　　　　　　　〕学生証番号〔　　　　　　　　　　　〕

問１．質量m の質点が中心力場$U=½k(x^2+y^2)$ で二次元平面内を運動するとき、ラグランジアンL をデカルト座標(x,y)で書き、オイラーラグランジュ方程式を求めよ。また、どのような運動か説明せよ。

解）$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-½k(x^2+y^2)$，$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-kx-m\ddot{x}=0$，$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=-ky-m\ddot{y}=0$，XY どちらも調和振動で独立なので楕円軌道。

※クーロンポテンシャル（万有引力）と同じく閉軌道になる。閉軌道になるのはこの二つ（調和＆クーロン）のみ（ランダウ）。

問2．前問で一般化運動量を求め、ハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。

解）$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$，$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$，$\mathcal{H}=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+½k(x^2+y^2)=\frac{1}{2m}\left(\dot{p}_x^2+\dot{p}_y^2\right)+½k(x^2+y^2)$

$\dot{p}_x=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}=-kx$，$\dot{p}_y=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}=-ky$，$\dot{x}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$，$\dot{y}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}$

問３．問１で、Lを極座標(r,θ)で書き直し、オイラーラグランジュ方程式を求めよ。また、どのような運動か説明せよ。

解）まず、$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より、$L=\frac{m}{2}\left(\left(\dot{r}\cos\theta-\dot{\theta}r\sin\theta\right)^2+\left(\dot{r}\sin\theta+\dot{\theta}r\cos\theta\right)^2\right)-½kr^2=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-½kr^2$

$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=-kr+mr\dot{\theta}^2-m\ddot{r}=0$，$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=-\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0$，$mr^2\dot{\theta}$（角運動量）が一定。その一定値を$M$とすれば一番目の運動方程式は，

$-kr+\frac{M^2}{mr^3}-m\ddot{r}=0$　となるので「中心部分が鋭く盛り上がったすり鉢」の中の運動。

※ポテンシャルの極小値の周りだけを考えれば，動径方向のみに関しては調和振動と見ることも出来る。

問４．前問（問３）で、一般化運動量を求め、ハミルトニアンに変換し、正準方程式を求めよ。また、保存量があればそれを指摘せよ。

解）$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r}$，$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$，$\mathcal{H}=p_r\dot{r}+p_\theta\dot{\theta}-L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+½kr^2=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}+½kr^2$

$\dot{p}_r=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}=\frac{p_\theta^2}{mr^3}-kr$，$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}=0$，$\dot{r}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}$，$\dot{\theta}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}$　，p_θが保存量。

問５．母関数$W(q,Q)=\frac{qQ}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}(q^2+Q^2)$ が与えられたときの正準変換を、$Q=\cdots,P=\cdots$ の形で求めよ。ヒント）$p=\frac{\partial W}{\partial q},P=-\frac{\partial W}{\partial Q}$である。
また、この正準変換を用いて$\mathcal{H}=\left(p+\sqrt{3}q\right)^2$を簡単にせよ。

解）$p=\frac{\partial W}{\partial q}=\frac{Q}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}q$を変形し、$Q=\sin\theta\cdot p+\cos\theta\cdot q$，一方、$P=-\frac{\partial W}{\partial Q}=\frac{-q}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}Q=\frac{-q}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(p\sin\theta+q\cos\theta)=-\sin\theta\cdot q+\cos\theta\cdot p$
ここで$\theta=\frac{\pi}{6}$とすると$Q=\frac{1}{2}\cdot p+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot q$　であるから、$\mathcal{H}=4\cdot\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=4Q^2$

問６．運動量pで一次元空間内を等速直線運動する質点の運動について、位相空間内の点を(x,p)とする。この点とわずかに異なる$(x,p+\Delta p)$，$(x+\Delta x,p)$，$(x+\Delta x,p+\Delta p)$の四つの点からなる長方形を考える。この長方形の面積が時間とともにどのように変化するか説明せよ。

解）面積の初期値は$\Delta x\Delta p$であり、等速直線運動であるので，時間経過とともに長方形から平行四辺形へ変形する。しかし、平行四辺形の高さΔp、底辺Δxは変わらないので、面積も不変。

問７．講義で印象に残った事項について説明せよ（感想に対しては採点しない)。
（解答例）パラメータ励振、角運動量の空間反転不変性、ミュオン（ミュー粒子）のスピン偏極と空間反転対称性、ラグランジアンの変数変換、ポワンカレの再帰定理、などの記述があった。
ポテンワカレの再帰定理は面白いのでつい話すのであるが、「軌跡はカオスになることもある」とも言っているので自己矛盾しているかも知れない。